Mathematatik für Informatiker II
2009

Tony Lemke

26. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

I Grundstrukturen der linearen Algebra **5**

IV.1 Gruppen, Ringe, Körper **6**

Definition Verknüpfung 6
Beispiel 6
Definiton Gruppe 6
Beispiel 7
Bemerkung 7
Definition Untergruppe 7
Bemerkung 7
Definition 7
Beispiel 4.1.1 8
Satz 4.1.2 8
Definition Ring 9
Definition Körper 10
Beispiel 4.1.3 11
Beispiel 4.1.4 11
Satz 4.1.5 Division mit Rest 12
Beispiel 13
Beispiel 13
Lemma 4.1.6 13
Definition 14
Fundamentalsatz der Algebra [Gauss 1799] 14
Korollar 4.1.7 14
Lemma 4.1.7 14
Beispiel 14
Korollar 4.1.9 14

IV.2 Vektorräume **16**

Definition 4.2.1 16
Rechenregeln 4.2.2 in K-Vektorraum V 16
Beispiel 4.2.3 17
Definition 4.2.4 18
Beispiel 4.2.5 18
Definition 4.2.6 19

Beispiel 20
Definition 4.2.7 20
Beispiel 4.2.8 21
Definition 4.2.9 22
Beispiel 22
Satz 22
Basisauswahlsatz 23
Beispiel 23
Satz 4.2.11 23

IV.3 Multiplikation von Matrizen und Vektoren **25**
Definition 25
Beispiel 25
Zahlenbeispiele 26
Satz 4.3.1 27
Definition 28
Definition 28
Definition 29
Satz 4.3.2 29
Anmerkung 30

V Lösung linearer Gleichungssysteme **31**
Beispiel 31
Vorkommen von linearen Gleichungssystemen 31
Satz 5.1 32
Algorithmus 5.3 Rückwärtseinsetzen 33
Algorithmus 5.4 Vorwärtseinsetzen 34
Algorithmus 5.5 Gauß-Elimination 34
Berechnung der LR-Zerlegung mittels elementarer Zeilenumformung 34
Satz 5.6 35
Satz 35
Gauß'sches Eliminationsverfahren 36

Teil I

Grundstrukturen der linearen Algebra

IV.1 Gruppen, Ringe, Körper

Definition Verknüpfung

Sei G Menge. **Verknüpfung** auf G:
Vorschrift, die zwei Elementen $a, b \in G$ ein neues Element $a * b \in G$ zuordnet, d.h. Abbildung

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to G \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

Beispiel

a) $G = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ $(:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\})$ mit Addition oder Multiplikation als Verknüpfung, d.h. man kann für $a, b \in G$

$$a * b := a \cdot b \text{ oder } a * b := a + b$$

definieren (Reihenfolge egal)

b) X Menge, $G := \mathrm{Abb}(X, X) := \{f : X \to X, f \text{ Abbildung}\}$
Definiere für $f, g \in G$:

$$f * g = f \circ g \in G \quad \text{Reihenfolge } \textbf{nicht} \text{ egal}$$

Definiton Gruppe

Menge G mit Verknüpfung $*$ heißt **Gruppe**, falls die folgenden (Gruppen-)Axiome erfüllt sind:

(G1) $(a * b) * c = a * (b * c)\ \forall a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz)

(G2) Es gibt ein $e \in G$ (neutrales Element), sodass
  a) $e * a = a\ \forall a \in G$
  b) $\forall a \in G : a' * a = e$

Die Gruppe heißt abelsche (oder kommutativ), falls **zusätzlich**

$$a * b = b * a\ \forall a, b \in G$$

Häufig abkürzend: $a \cdot b$ oder ab anstelle $a{*}b$

Beispiel

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit $+$ sind Gruppen. $\mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ mit $\cdot$ ist Gruppe, aber $\mathbb{Z}$ mit $\cdot$ zum Beispiel **nicht** (denn in $\mathbb{Z}$ ist 1 neutrales Element bezüglich $\cdot$, aber für $a \in \mathbb{Z}$ ist $\frac{1}{a} \notin \mathbb{Z}$).

$\mathbb{N}_0$ mit $+$ ist auch keine Gruppe (denn neutrales Element ist 0, aber für $a \in \mathbb{N}$ ist $-a \in \mathbb{N}$ mit $a + (-a) = 0$).

Bemerkung

Für eine Gruppe mit $*$ ist neutrales Element $e \in G$ **eindeutig** bestimmt und es gilt auch $a * e = a \; \forall a \in G$.

Auch das inverse Element ist eindeutig bestimmt: Wir bezeichnen diese für $a \in G$ mit a^{-1} und es gilt $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Definition Untergruppe

$G' \subset G$ mit $G' \neq \emptyset$ ist:

$$a, b \in G' \Rightarrow a * b \in G'$$
$$a \in G' \Rightarrow a^{-1} \in G'$$

Insbesondere ist G' mit $*$ wieder Gruppe (insbesondere ist $e \in G'$)

Bemerkung

Betrachte $G = \{a_1, a_2\}$ (zwei Elemente) $\Rightarrow$ ein Element muss das neutrale Element sein, d.h. $a_1 := e$, setze $a := a_2$. Mit dem Gruppenaxiom folgt: $a^{-1} = a$, also $a \cdot a = e$

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

Symmetrie $\Rightarrow$ abelsche Gruppe

Definition

G mit $\cdot$ und H mit $\odot$ Gruppen.

Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ heißt (Gruppen-)Homomorphismus, falls

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b) \; \forall a, b \in G,$$

wobei φ eine leineare Abbildung ist.

Homomorphismus heißt **Iso**morphismus, falls φ bijektiv.

Beispiel 4.1.1

a) Seien $G = \mathbb{R}$ mit $+$ und $H = \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ mit $\cdot$ Gruppen

$\Rightarrow \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist Isomorphismus (Homomorphimus, da $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

$x \mapsto e^x$

und Isomorphismus, da $x \mapsto e^x$ bijektiv).

b) $\mathbb{Z}$ mit $+$ ist abelsche Gruppe $\Rightarrow$ für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ist Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_m : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ a &\mapsto m \cdot a \end{aligned}$$

Homomorphismus, denn $m(a + b) = ma + mb$ (hier: $G = \mathbb{Z}$ mit $+$ und $H = \mathbb{Z}$ mit $+$). Sein Bild $m\mathbb{Z} := \{m \cdot a : a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$ (mit $m = 1 \Rightarrow m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ in diesem Fall zu vernachlässigen) ist **Unter**gruppe, da $ma + mb = m(a + b)$ und $-mb = m(-b)$

c) zyklische Gruppe mit m Elementen: Sei $m \in \mathbb{N}$ **fest**, zu jedem $r \in \{0, \dots, m - 1\}$ betrachte $r + m \in \mathbb{Z} := \{r + m \cdot a : a \in \mathbb{Z}\}$ (die um r additiv verschobene Untergruppe $m\mathbb{Z}$)

Beispiel $m = 2$: $0 + 2\mathbb{Z}$ Menge der geraden ganzen Zahlen
$1 + 2\mathbb{Z}$ Menge der ungeraden ganzen Zahlen

Allgemein: $\mathbb{Z} = (0 + m\mathbb{Z}) \dot{\cup} (1 + m\mathbb{Z} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} ((m + 1) + m\mathbb{Z})$ *disjunkte Vereinigung*

Entscheidung zu welchem $r + m\mathbb{Z}$ eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ gehört mittels Division mit Rest: Ist

$$\frac{a}{m} = k + \frac{r}{m} \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \text{ und } r \in \{0, \dots, m - 1\}$$

$a \in r + m\mathbb{Z}$, da $a = km + r$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{r + m\mathbb{Z}}$ Restklasse modulo m (alle Zahlen, die bei Division durch m Rest r haben))

$a, a' \in$ derselben Restklasse, falls $a - a'$ teilbar durch m

Schreibweise: $a \equiv a' mod m$ ($:\Leftrightarrow a - a'$ teilbar durch m)

Bezeichnung: Zu jedem $a \in \mathbb{Z}$ ist $\overline{a} := a + m\mathbb{Z}$, seine Restklasse $\rightsquigarrow \overline{a}$ „Repäsentant“ von $a + m\mathbb{Z}$. (Für $m = 2$ sind $\overline{0}, \overline{1}$ Repräsentanten von $0 + 2\mathbb{Z}$ und $1 + 2\mathbb{Z}$)

Definiere Addition von Restklassen durch $\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}$

Satz 4.1.2

Für $m \in \mathbb{Z}$ ist die Menge

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} := \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m - 1}\}$$

der Restklasse modulo m mit $+$ wie oben definiert ist eine abelsche Gruppe, und die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ a &\mapsto a + m\mathbb{Z} \end{aligned}$$

ist surjektiver Homomorphismus.

Beweisskizze

Assoziativität und Kommutativität wird von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ vererbt, zum Beispiel:

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = (\overline{a+b}) + \overline{c} = \overline{\overline{a+b}+c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$$

Neutrales Element ist $\overline{0}$, da

$$\overline{0} + \overline{a} = \overline{0+a} = \overline{a}$$

Inverses von $\overline{a}$ ist $\overline{-a}$, da

$$\overline{a} + \overline{-a} = \overline{a + (-a)} = \overline{0}$$

Bezeichnung: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ heißt für $m > 0$ durch zyklische Gruppe der Ordnung m

Beispiel Rechnen mit Restklassen:

- Stundenzeiger der Uhr $\triangleq$ Restklasse mod 12
- Wochentage $\triangleq$ Restklasse mod 7

Definition Ring

Menge R mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : R \times R &\to R \\ (a,b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : R \times R &\to R \\ (a,b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

heißt Ring, falls

(R1) $(R, +)$ ist abelsche Gruppe

(R2) $\cdot$ ist assoziativ, d.h.: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \forall a, b, c$

(R3) Distributivgesetze $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Ring **kommutativ**, falls $a \cdot b = b \cdot a \ \forall a, b \in R$
$1 \in R$ **Einselement**, falls $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \ \forall a \in R$
$0 \in R$ **Nullelement**, falls $a + 0 = 0 + 1 = a \ \forall a \in R \Rightarrow 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

Beachte: Bezüglich $\cdot$ ist kein Inverses verlangt!

Beispiel: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind mit der üblichen Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ kommutative Ringe

Speziallfall: Ist R bezüglich $\cdot$ kommutativ und zusätzlich $R \backslash \{0\}$ bezüglich $\cdot$ abelsche Gruppe, dann ist $(R, +, \cdot)$ „Körper“

Definition Körper

Eine Menge K mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : K \times K &\to K \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : K \times K &\to K \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

heißt „Körper“ („field“), wenn folgende Axiome gelten:

(K1) $(K, +)$ ist abelsche Gruppe (neutrales Element $\equiv$ Nullelement 0)
(das zu $a \in K$ inverse Element sei $-a \in K$)

(K2) $(K^*, \cdot)$ mit $K^* := K \backslash \{0\}$ ist abelsche Gruppe (neutrales Element: Einselement, bezeichnet mit 1; für $a \in K^*$ bezeichne a^{-1} (oder $\frac{1}{a}$), das zu a bezüglich $\cdot$ inverse Element)

(K3) Distributivgesetze: $\forall a, b, c \in K$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Bemerkung

Folgende Rechenregeln gelten im Körper $(K, +, \cdot)$:

- $1 \neq 0 \Rightarrow \#K \geq 2$ (das heißt Körper besitzt mindestens 2 Elemente)
- $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0 \ \forall a \in K$

- $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
- $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ und $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
- $ab = a\tilde{b}$ und $a \neq 0 \Rightarrow b = \tilde{b}$

Beispiel 4.1.3

a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper (Achtung: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper, da $\frac{1}{a} \neq \mathbb{Z}$)

b) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **Körper** der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (a_1, a_2), (b_1, b_2) &\mapsto (a_1 + b_1, a_2, b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (a_1, a_2), (b_1, b_2) &\mapsto (a_1, a_2) \cdot (b_2, b_2) = (a_1 b_1 - a_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

Nullelement ist $(0, 0)$, denn $(a_1, a_2) + (0, 0) = (a_1 + 0, a_2 + 0) = (a_1, a_2)$

Einselement ist $(1, 0)$, denn $(a_1, a_2) \cdot (1, 0) = (a_1 \cdot 1 - a_2 \cdot 0, a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1) = (a_1, a_2)$

Inverses von $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ ist

$$(a_1, a_2)^{-1} := \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right),$$

denn

$$\begin{aligned} (a_1, a_2)(a_1, a_2)^{-1} &= (a_1, a_2) \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right) \\ &= \left(a_1 \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} - a_2 \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2}, a_1 \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} + a_2 \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} \right) \\ &= \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_1 a_2 + a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right) = (1, 0) \quad (\text{da } \mathbb{R} \text{ bezüglich } \cdot \text{ kommutativ}) \end{aligned}$$

Beispiel 4.1.4

$K[t] := \{f(t) := \sum\limits_{j=0}^{n} a_j t^j$ mit $a_0, \ldots, a_n \in K\}$ (Polynome über K; Menge aller Polynome mit Koeffizienten in K)

Hier: t Unbekannte (muss nicht aus K sein); alles einsetzbar, was sinnvoll ist.
$a \cdot t := (ta_1, ta_2)$ mit $a \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$

Monom: alle $a_i = 0$ außer einem

Nullpolynom: $a_j\ \forall j$ (d.h. $f \equiv 0$), d.h. $f(t) = a_r t^r$

Grad von f: $\deg f := \begin{cases} -\infty, & \text{falls } f \equiv 0 \\ \max\{r \in \mathbb{N}_0 : a_r \neq 0\}, & \text{sonst} \end{cases}$

„Natürliche" Addition und Multiplikation in $K[t]$

Sei $f, g \in K[t]$, d.h.z.B.:

$$f(t) := \sum_{j=0}^{n} a_j t^j, \quad g(t) := \sum_{j=0}^{m} b_j t^j$$

Definiere $s := \max\{m, n\}$
$\Rightarrow (f+g)(t) := \sum\limits_{j=0}^{s} (a_j + b_j) \cdot t^j$ (dabei vorausgesetzt, dass f oder g mit $a_j's = 0$ oder $b_j's = 0$ aufgefüllt werden können, z.B.: $f(t) = 3 + 0t + 0t^2$, $g(t) = 2 + 5t + 3t^2$
$\Rightarrow (f+g)(t) = (3+2) + 5t + 3t^2$)

Des weiteren:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(t) &= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j t^j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{m} b_k t^k\right) \\ &= \sum_{r=0}^{m+n} c_r t^r \text{ mit } c_r := \sum_{j+k=r} a_j b_k\end{aligned}$$

$$(\text{d.h. } c_0 = a_0 + b_, \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)$$

Bemerkung

K Körper $\Rightarrow (K[t], +, \cdot)$ ist kommutativer Ring („Polynomring über K")

Beachte

Der Mangel eines Rings gegenüber einem Körper ist, dass man im Allgemeinen nicht dividieren kann, das heißt für $f \in K[t]$ ist im Allgemeinen $f^{-1}(t) := \frac{1}{f(t)} \notin K[t]$

Satz 4.1.5 Division mit Rest

$f, g \in K[t], g \neq 0$
$\Rightarrow$ es gibt ein eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[t]$, sodass $f = q \cdot g + r$ und $\deg r < \deg g$

Beispiel

$K = \mathbb{R}$, $f(t) := 3t^3 + 2t + 1$, $g(t) := t^2 - 4t$

$$
\begin{array}{l}
\Big(\ 3t^3 \qquad\quad + 2t + 1\Big) : \Big(t^2 - 4t\Big) = 3t + 12 + \dfrac{50t+1}{t^2-4t} \\
\underline{-\,3t^3 + 12t^2} \\
\qquad\quad 12t^2 \ \ + 2t \\
\qquad\ \ \underline{-\,12t^2 + 48t} \\
\qquad\qquad\qquad 50t
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Also ist hier $r(t) = 50t + 1$ und $q(t) = 3t + 12$; $\deg r = 1 < 2 = \deg g$

Beispiel

a) $f(t) := t^2 + 1$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ $(t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 = -1)$

b) $f(t) := t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$ hat zwei Nullstellen in $\mathbb{C}$, nämlich i und $-i$, weil $i^2 = -1 \Leftrightarrow i^2 + 1 = 0$ und $(-i)^2 = i^2 = -1$ $\square$

Lemma 4.1.6

Sei $\lambda \in K$ Nullstelle von $f \in K[t]$
$\Rightarrow \exists g \in K[t]$, sodass

- $f(t) = (t - \lambda)g(t)$
- $\deg g = \deg f - 1$

Beispiel

$\mathbb{R}$, $f(x) := x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ hat Nullstelle $\lambda_1 = 1$ (Wird geraten oder durch Newton-Verfahren erhalten)

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)g(x)$$

Polynomdivision liefert:

$$
\begin{array}{l}
\Big(\ x^3 - 4x^2 + 5x - 2\Big) : \Big(x - 1\Big) = x^2 - 3x + 2 \\
\underline{-\,x^3 \ + x^2} \\
\qquad -\,3x^2 + 5x \\
\qquad\ \ \underline{3x^2 - 3x} \\
\qquad\qquad\quad 2x - 2 \\
\qquad\qquad\ \underline{-\,2x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

also $f(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$ und $\deg g = 2 = \underbrace{\deg f}_{3} - 1$ $\square$

Definition

- Vielfachheit einer Nullstelle λ:
  Maximales r, sodass f eine Zerlegung $f(t) = (t-\lambda)^r \cdot g(t)$ mit $g \in K[t]$ hat

  Beispiel: $f(t) = (t-1)^3 \cdot g(t) \Rightarrow$ Vielfachheit der Nullstelle $\lambda_1 = 1$ ist 3

- f zerfällt in Linearfaktoren, falls $f \in K[t]$ die Darstellung

$$f(t) = (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_m)^{r_m}$$

  hat (d.h. λ_i ist Nullstelle von f mit Vielfachheit r_i)

  Beispiel: $f(t) = t^2 + 1$ zerfällt über $\mathbb{R}$ **nicht** in Linearfaktoren; aber $f(t) = t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$ wohl.

Fundamentalsatz der Algebra [Gauss 1799]

Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg f > 0$ hat **mindestens eine** Nullstelle in $\mathbb{C}$

Hat f eine Nullstelle $\Rightarrow$ Herausdividieren mit Lemma 4.1.6 und wiederhole (da $g(t)$ wieder mindestens einen Nullstelle hat wegen Fundamentalsatz der Algebra) und ... und kein Rest, das heißt $\deg r = 0$

Korollar 4.1.7

Jedes Polynom in $\mathbb{C}[t]$ zerfällt in Linearfaktoren (heißt natürlich nicht, dass die Nullstellen reell sind)

Lemma 4.1.7

$f \in \mathbb{R}[t]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle von f

$\Rightarrow \overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ ist auch eine Nullstelle von f, und beide haben dieselbe Vielfachheit.

Beispiel

$f(t) = t^2 + 1 \Rightarrow \lambda = i$ Nullstelle und ebenso $\overline{\lambda} = -i$; beide mit Vielfachheit 1 (Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten sind symmetrisch bezüglich der x-Achse)

Korollar 4.1.9

Jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[t]$ von **ungeradem** Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Begründung

Polynom von Grad d zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren, d.h. $r_1 + \ldots + r_m = d$, jede Nullstelle in $\mathbb{C}$ tritt mit komplex Konjugierte auf

$\Rightarrow$ für f mit ungeradem Grad muss es einzelne reelle Nullstelle geben

IV.2 Vektorräume

Im Folgenden: $K = (K, +, \cdot)$ stets Körper

Definition 4.2.1

Sei $(K, +, \cdot)$ Körper. Eine Menge V mit der inneren Verknüpfung

$$\begin{aligned} \oplus : V \times V &\to V \\ (v, w) &\mapsto v \oplus w \end{aligned} \qquad \text{(Addition)}$$

und einer (äußeren) Verknüpfung

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V &\to V \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{(„Multiplikation mit Skalaren“ oder} \\ &\text{„skalare Multiplikation“)} \end{aligned}$$

heißt (K-)Vektorraum oder Vektorraum über K, falls gilt

(V1) $(V, \oplus)$ ist abelsche Gruppe (neultrales Element: Nullvektor oder $\mathbf{0}$; Inverses von $v \in V$ heißt Negatives, bezeichnet mit $-v$)

(V2) Verträglichkeit der Multiplikation mit Skalaren:
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
- $\lambda \cdot (v \oplus u) = \lambda \cdot v \oplus \lambda \cdot u$
- $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v), \quad 1 \cdot v = v$

Beachte: Eine innere Verknüpfung $\cdot : V \times V \to ?$ ist (noch) nicht definierte $\rightsquigarrow$ „inneres Produkt“, „Skalarprodukt“ $\cdot : V \times V \to K$ ($\rightsquigarrow$ Euklidischer Vektorraum)

Rechenregeln 4.2.2 in K-Vektorraum V

a) $0 \cdot v = \mathbf{0}$

b) $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

c) $\lambda \cdot v = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = \mathbf{0} \vee \mathbf{v} = \mathbf{0}$

d) $(-1) \cdot v = -v$

Beweis von a)

$0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v \oplus 0 \cdot v \Rightarrow 0 \cdot v = \mathbf{0}$, weil $0 \cdot v$ neutrales Element bezüglich Addition $\oplus$ sein muss.

Beispiel 4.2.3

a) Standardbeispiel ist der (Standard-)Vektorraum

$$V : K^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K \right\} \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} \oplus : V \times V &\to V & \text{(komponentenweise Addition)} \\ (x, y) &\mapsto \begin{matrix} x \oplus y \\ \shortparallel \\ \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V &\to V & \text{(Multiplikation jedes} \\ (\lambda, v) &\mapsto \begin{matrix} \lambda \cdot v \\ \shortparallel \\ \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix} \end{matrix} & \text{Eintrags mit Skalar)} \end{aligned}$$

b) Vektorraum der $m \times n$-Matrizen über K

$$\begin{aligned} V := K^{m \times n} (= M(m \times n, K)) &:= \{A = (a_{jk})_{j=1,\dots,m, k=1,\dots,n} : a_{jk} \in K \ \forall j, k\} \\ &= \left\{ A = (a_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}} : a_{jk} \in K \ \forall j, k \right\} \end{aligned}$$

Man ordnet Matrizen in einem rechteckigen Schema an:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit m Zeilen und n Spalten.

Addition in $K^{m\times n}$

$$\begin{aligned}\oplus : K^{m\times n} \times K^{m\times n} &\to K^{m\times n}\\ (A,B) &\mapsto A \oplus B := (a_{kj} + b_{kj})_{\substack{k=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}\end{aligned}$$

Skalare Multiplikation

$$\begin{aligned}\cdot : K \times K^{m\times n} &\to K^{m\times n}\\ (\lambda, A) &\mapsto \lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{kj})_{\substack{k=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}\end{aligned}$$

c) Polynomring $(K[t],+,\cdot)$ kommutativer Ring
(innere) Addition wie in (4.1.4) b)
(äußere) Multiplikation mit Skalaren:

$$\begin{aligned}\cdot : K \times K[t] &\to K[t]\\ (\lambda, f) &\mapsto (\lambda \cdot f)(t) := \lambda \left(\sum_{j=0}^{n} a_j t^j\right) = \sum_{j=0}^{n} (\lambda \cdot a_j) t^j\end{aligned}$$

Definition 4.2.4

Sei V K-Vektorraum und $W \subset V$ Teilmenge. W heißt Unter(vektor)raum von V, falls

(UV1) $W \neq 0$

(UV2) $v, w \in W \Rightarrow v \oplus w \in W$ (W abgeschlossen bezüglich $\oplus$)

(UV3) $\lambda \in K, v \in W \Rightarrow \lambda \cdot w \in W$ (W abgeschlossen bezüglich Multiplikation mit Skalaren)

Insbesondere: W mit $\oplus, \cdot$ wieder Vektorraum (mit $\oplus, \cdot$ aus V)

Beispiel 4.2.5

a)

$$W = \{\mathbf{0}\} \text{ für } W \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \text{ für } \textbf{festes } a_1, a_2 \in K \right\}$$

sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$, aber die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b \text{ für } a_1, a_2, b \in K \text{ und } b \neq 0 \right\} =: \hat{W}$$

ist kein Unterverktorraum von $\mathbb{R}^2$, denn $v, w \in W$, d.h. v so, dass

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

und w so, dass

$$b_1 w_1 + b_2 w_2 = 0$$

$$\Rightarrow v \oplus w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \text{ Zu zeigen: } v \oplus w \in W$$

$$\begin{aligned} a_1(v_1 + w_1) + a_2(v_2 + w_2) &= a_1 v_1 + a_1 w_1 + a_2 v_2 + a_2 w_2 \\ &= \underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2}_{=0} + \underbrace{a_1 w_1 + a_2 w_2}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Dagegen: $\hat{W}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$, da

$$\begin{aligned} v, w \in \hat{W} \text{ bedeutet: } & a_1 v_1 + a_2 v_2 = b \\ & a_1 w_1 + a_2 w_2 = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v \oplus w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \text{ und } & a_1(v_1 + w_1) + a_2(v_2 + w_2) \\ &= \underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2}_{=b} + \underbrace{a_1 w_1 + a_2 w_2}_{=b} \\ &= 2b \neq b \end{aligned}$$

$\Rightarrow v \oplus w \notin \hat{W}$

b)

$$V = \text{ Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ Funktion}\}$$

hat Untervektorräume

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[t]_d :=& \{f \in \mathbb{R}[t] \text{ mit } \deg f \leq d\} \subset \mathbb{R}[t] \\ & \subset \{f \in \text{ Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ stetig}\} \subset V \end{aligned}$$

Definition 4.2.6

Familie von Vektoren v^j $v^1, \dots v^r \in V$
$r \in V$ heißt **Linearkombination** von $v^1, \dots, v^r$, wenn es $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ gibt, sodass sich v als

$$v = \lambda_1 v^1 \oplus \lambda_2 v^2 \dots \lambda_r \oplus v^r$$

darstellen lässt.

Bezeichnung $\text{span}\{v^1, \dots, v^r\} := \{v \in V : v \text{ ist Linearkombination von } v^1, \dots, v^r\}$

Es gilt: $v^1, \dots, v^r \in V$
$\Rightarrow \text{span}\{v^1, \dots, v^r\} \subseteq V$ ist Untervektorraum
Genauer: $\text{span}\{v^1, \dots, v^r\}$ ist der **kleinste** Untervektorraum von V, der $v^1, \dots, v^r$ enthält.

Beispiel

$V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$

a) $v^1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\text{span}\{v^1\} = \{v \in V : v_2 = 0\}$
$\text{span}\{v^2\} = \{v \in V : v_1 = 0\}$
$\text{span}\{v^1, v^2\} = V (= \mathbb{R}^2)$, da sich **jedes** $v \in V$ als

$$v = \lambda_1 v^1 + \lambda_2 + v^2$$

darstellen lässt.

b) $v^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ \text{span}\{v^1\} \subset V$

$\text{span}\{v^0, v^1, v^2\} = V = \text{span}\{v^0, v^2\} = \text{span}\{v^0, v^1\}$

Beispiel $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, Finde $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, sodass $w = \lambda_0 v^0 + \lambda_1 v^1$

$\rightsquigarrow$ „Darstellung“ von V über span nicht „eindeutig

$\rightsquigarrow$ „Effiziente“ Darstellung, das heißt: Darstellung mit maximaler Anzahl aufspannender Vektoren

Definition 4.2.7

Sei V K-Vektorraum. Eine Familie von Vektoren $(v^j)_{j \in I}$ (I Indexmenge) heißt **linear** unabhängig, falls

$$\sum_{j \in I} \lambda_j v^j = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_j = 0 \text{ für alle } j \in I,$$

ansonsten linear abhängig.

Beispiel 4.2.8

a) $K = \mathbb{R}, v = \mathbb{R}^n$
Betrachte die **Einheitsvektoren**

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei der Index die Stelle der 1 angibt.

Die Familie $(e^j)_{j=1,\ldots,n}$ ist linear unabhängig, denn:

Es gelte: $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e^j = \mathbf{0}$; zu Zeigen: $\lambda_j = 0 \ \forall j = 1, \ldots, n$

Beweis

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^j = \lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \ldots + \lambda_n e^n = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Mit derselben Argumentation kann man auch zeigen, dass eine beliebige Teilmenge von $(e^j)_{j=1,\ldots,n}$ auch linear unabhängig ist.

b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[t] = \left\{ f(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j t^j : a_j \in \mathbb{R} \right\}$

Betrachte die Monome $(t^j)_{j=0,\ldots n}$. Diese sind linear unabhängig, denn: Es gelte

$$\sum_{j=0}^{n} a_j t^j = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots a_n t^n \equiv 0 \quad ((d.h. :) = 0 \ \forall t)$$

$\Rightarrow a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ \ldots,\ a_n = 0$

(Oder: Grad des Polynoms links und rechts anschauen)

Definition 4.2.9

Eine Familie $\mathcal{B} = \left(v^j\right)_{j\in I}$ in einem Vektorraum V heißt **Erzeugendensystem** von V, wenn

$$V = \operatorname{span}\left(v^j\right)_{j\in I}$$

d.h. jedes $v \in V$ lässt sich als Linearkombination der v^j $(j \in I)$ schreiben, d.h. jedes $v \in V$ hat Darstellung

$$v = \sum_{j\in I} \lambda_j v^j$$

mit irgendwelchen $\lambda_j \in K$.

Die Familie $\mathcal{B} = \left(v^j\right)_{j\in I}$ heißt **Basis** von V, falls

- B ein Erzeugendensystem ist **und**
- die Vektoren in B sind linear unabhängig

Ist $B = \{v^1, \dots, v^n\}$ eine Basis von V, so heißt

$$\begin{array}{ccc} \#B = n & =: & \dim V \\ \text{(Länge der Basis)} & & \text{(Dimension des Vektorraums)} \end{array}$$

Falls B keine **endliche** Basis ist (d.h. keine Basis endlicher Länge), so setzen wir $\dim V := \infty$

Beispiel

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$
$B = \{e^1, \dots, e^n\}$ Einheitsvektoren bilden Basis von $\mathbb{R}^n$ und $\dim \mathbb{R}^n = b$ („kanonische Basis“)

Dagegen ist $\{e^1, 2e^1, e^2, \dots, e^n\}$ keine Basis, aber ein Erzeugendensystem von V, aber es ist eie Basis von $W := \{v \in \mathbb{R}^n : v_1 = 0\}$ (erste Komponente jedes Kektors verschwindet).

b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[t]$
Die Monome $(t^j)_{j=0,\dots,n}$ bilden eine Basis für V, d.h. alle Polynome werden von Monomen erzeugt und Monome sind linear unabhängig. Da Polynomgrad beliebig sein kann, gilt $\dim \mathbb{R}[t] = \infty$.

Satz

Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Beweis

Bei $\dim V < \infty$ konstruktiv nach Basisauswahlsatz.

Basisauswahlsatz

Aus jedem endlichen Erzeugendensystem (d.h. Erzeugendensystem von V existiert mit endlich vielen Vektoren) kann man eine Basis auswählen.

Insbesondere hat jeder Vektorraum V mit $\dim V < \infty$ eine endliche Basis.

Beispiel

$K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$
Betrachte $\{e^1, 2e^1, e^2, 2e^2, \ldots, e^n, 2e^n, e^1 + e^2\}$. Dies ist Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$, alle Vektoren linearabhängig $\rightsquigarrow$ streiche alle linearen Abhängigkeiten, aber stelle sicher, dass $\operatorname{span}\{\ldots\} = V$

$\Rightarrow \{e^1, 2e^1, e^2, 2e^2, \ldots, e^n, 2e^n, e^1 + e^2 \setminus 2e^1, 2e^2, \ldots, 2e^n, e^1 + e^2\}$ ist Basis, sowie $\{e^1, 2e^1, e^2, 2e^2, \ldots, e^n, 2e^n, e^1 + e^2 \setminus e^1, e^2, \ldots, e^n, e^1 + e^2\}$.

Satz 4.2.11

Sei $\mathcal{B} = \{v^1, \ldots, v^n\}$ Familie von Vektoren in K-Vektorraum $V \neq \{0\}$. Dann ist **äquivalent**:

(i) $\mathcal{B}$ ist eine **Basis**, das heißt: ein lineares unabhängiges Erzeugendensystem

(ii) $\mathcal{B}$ ist ein **unverkürzbares** Erzeugendensystem (das heißt kein Vektor darf weggelassen werden)

(iii) Zu jedem $v \in V$ gibt es **eindeutige** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, sodass v die Darstellung

$$v = \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \ldots + \lambda_n v^n$$

(das heißt $\mathcal{B}$ ist Erzeugendensystem **und** eindeutige Darstelllung)

(iv) $\mathcal{B}$ ist **unverlängerbar** unabhängig, das heißt für jedes $v \in V$ wird

$$\mathcal{B} \cup \{v\} = \{v^1, \ldots v^n, \mathbf{v}\}$$

linear abhängig.

Beispiel für (iv)

$V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ mit $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wäre

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

linear abhängig.

Beweis

[Fi] §1.5.2

IV.3 Multiplikation von Matrizen und Vektoren

Im folgenden stets K Körper und $j, k, m, n, p, q, r, s \in \mathbb{N}$

Definition

Sei

$$A \in K^{m \times n} = \left\{ A = (a_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}, a_{jk} \in K \ \forall K \right\}$$

$$B \in K^{n \times p} = \left\{ B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}, b_{jk} \in K \ \forall K \right\}$$

Definiere Matrixprodukt $AB := A \cdot B =: C \in K^{mxp}$

$$C = (c_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq p}} \text{durch } c_{jk} := \sum_{r=1}^{n} a_{jr} b_{rk} = a_{j1} b_{1k} + \ldots + a_{jn} b_{nk}$$
$$\text{für } 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p$$

Das heißt:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \ \ \ldots \ \ a_{1n}} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \boxed{a_{m1} \ \ \ldots \ \ a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \ldots \\ \ddots \\ \ldots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{1p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigcirc & \square & & \\ \bigcirc & & & \square \end{pmatrix}$$

Beachte: Die „innere“ Matrixdimension n muss übereinstimmen, damit AB sinnvoll definiert.

Spezialfall: $m = n = p$: quadratische Matrix

Beispiel

a) $m = 1$, $p = 1$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig

$$A = (a_{11}, \ldots, a_{1n}) \in \mathbb{R}^{1 \times n}, B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Rightarrow AB = (a_{11}, \ldots, a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + \ldots a_{1n}b_{n1} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$$

b) $m, p \in \mathbb{N}$ beliebig, $n = 1$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}, B = (b_{11}, \ldots, b_{1p}) \in \mathbb{R}^{1\times p}$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot (b_{11}, \ldots, b_{1p}) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \ldots & a_{11}b_{1p} \\ a_{21}b_{11} & \ldots & a_{21}b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & \ldots & a_{m1}b_{1p} \end{pmatrix}$$

c) $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig, $p = 1$ (Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, v \in \mathbb{R}^n \; (= \mathbb{R}^{n\times 1})$

$$\Rightarrow Av = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \ldots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \ldots + a_{mn}v_n \end{pmatrix}$$

$$=: \begin{pmatrix} w_1 \\ \ldots \\ w_n \end{pmatrix} =: w \in \mathbb{R}^n$$

Typisch:

- $A \in K^{m\times n}, B \in K^{n\times p} \Rightarrow AB \in K^{m\times p}$
- $A \in K^{m\times n}, v \in K^n \Rightarrow Av \in K^n$

Zahlenbeispiele

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{2\times 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{2\times 3}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{2\times 3}}$

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{2\times 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{3\times 2}}$ nicht definiert

c) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}2\times 1}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Allgemein

$E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $E = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $E = (\delta_{jk})_{1\leq j,k\leq n}$ mit

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases} \qquad \text{Kronecker-Symbol}$$

heißt **Einheitsmatrix**.

Achtung:

Selbst wenn $m = n = p$, ist die Multiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$$

Satz 4.3.1

Für alle $A \in K^{m\times n}, B \in K^{n\times p}, C \in K^{p\times q}$ gilt

$$(AB)C = A(BC)$$

Beweis

Vorraussetzungen an die Dimension erfüllt.

$$\text{Setze } D := AB, D \text{ hat Einträge } D = (d_{jk})_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq k\leq p}} \text{ mit } d_{jk} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr}b_{rk}$$

$$F := DC \text{ hat Einträge } (f_{js})_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq s\leq q}} \text{ mit } f_{js} = \sum_{r=1}^{p} d_{jr}c_{rs}$$

$$\Rightarrow f_{js} = \sum_{r=1}^{p} d_{jr} c_{rs} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{r=1}^{n} a_{jr} b_{rk} \right) c_{ks}$$
$$= \sum_{r=1}^{n} a_{jr} \underbrace{\sum_{k=1}^{p} b_{rk} c_{ks}}_{:=g_{rs}} \quad \text{Einträge von } G := BC$$
$$= \sum_{r=1}^{n} a_{jr} g_{rs} = \text{ Einträge von } A(BC)$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \forall A \in & K^{m\times n}, B, C \in K^{n\times p} \\ & A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \\ \forall A, B \in & K^{m\times n}, C \in K^{n\times p} \\ & (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \end{aligned}$$

Definition

$A \in K^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ (quadratisch!) heißt **invertierbar**, falls es ein $X \in K^{n\times n}$ gibt mit

$$A \cdot X = X \cdot A = I \quad (\textbf{Einheitsmatrix})$$

Bezeichnung: $X = A^{-1}$, d.h. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
Inverse ist **eindeutig**, denn: Annahme: es gibt $X, Y \in K^{n\times n}$ mit $AX = I = XA$ und $AY = I = YA$
$\Rightarrow \mathbf{X} = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y$

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbar $\Rightarrow AB$ invertierbar und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Hierbei ist die Reihenfolge zu beachten!

Beweis

A, B invertierbar, d.h. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ und $B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I$
$\Rightarrow (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1} \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I} B = B^{-1}B = I$
$\Rightarrow (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = I$

Definition

Die Menge $GL(n, K) := \{A \in K^{n\times n}, A \text{ invertierbar}\}$ heißt *General Linear Group*, da sie mit der Matrixmultiplikation und I als neutralem Element eine Gruppe bildet (aber im Allgemeinen keine abelsche Gruppe)

Definition

Für $A \in K^{m \times n}$ mit $A = (a_{jk})_{\substack{1 \le j \le m \\ 1 \le k \le n}}$ heißt

$$A^T := (a_{kj})_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le j \le m}} \in K^{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

die zu A **transponierte** Matrix. (Andere Bezeichnung: A^t)

Für $v \in K^n$ $(= K^{n \times 1})$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ist $v^T = (v_1, \dots, v_n) \in K^{1 \times n}$

Beachte

- Für $v \in K^n$ ist $vv^T \in K^{n \times n}$ $\quad vv^T = \begin{pmatrix} v_1 v_1 & \dots & v_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n v_1 & \dots & v_n v_n \end{pmatrix}$

- $v^T v \in K$, $v^T v = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j^2 = ||v||_2^2$ (Skalarprodukt von Vektoren)

Insbesondere ist $\frac{vv^T}{v^T v}$ wohldefiniert, da $\frac{vv^T}{v^T v} = \frac{1}{\underbrace{v^T v}_{\text{Skalar}}} \cdot \underbrace{vv^T}_{\text{Matrix}}$, aber $\frac{v^T v}{vv^T}$ nicht wohldefiniert.

Satz 4.3.2

i) $A \in K^{m \times n} \Rightarrow (A^T)^T = A$

ii) $A, B \in K^{m \times n} \Rightarrow (A + B)^T = A^T + B^T$

iii) $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times p}$

$\Rightarrow (AB)^T = B^T A^T$ (Hierbei ist die Reihenfolge zu beachten!)

Beweis (iii)

$AB =: C \in K^{m \times p}$ mit $c_{jk} = \sum\limits_{r=1}^{n} a_{jr} b_{rk}$, $1 \le j \le m$, $1 \le k \le p$

$\Rightarrow C^T = (\tilde{c}_{jk})_{\substack{1 \le j \le p \\ 1 \le k \le m}} \in K^{p \times m}$ mit

$$\tilde{c}_{jk} = c_{kj} = \sum_{r=1}^{n} a_{kr} b_{rj} \text{ und } \underbrace{\underbrace{B^T}_{\in K^{p\times n}} \underbrace{A^T}_{\in K^{n\times m}}}_{\in K^{p\times m}} \text{ hat Einträge } (B^T A^T)_{ls} = \sum_{r=1}^{n} b_{rl} a_{sr}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} a_{sr} b_{rl} = c_{sl}$$

Folgerung

Für $A \in K^{n\times n}$ invertierbar ist auch A^T invertierbar und es gilt $(A1T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Beweis

$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I \quad \text{und} \quad A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$
Daraus folgt: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ □

Anmerkung

- $\mathbb{Q} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\mathbb{Q}$ invertierbar **unitär**, falls $\mathbb{Q}^{-1} = \overline{\mathbb{Q}}^T$
- $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbb{Q}$ invertierbar heißt **orthogonal**, falls $\mathbb{Q}^{-1} = \mathbb{Q}^T$. „Orthogonal“ bedeutet: für zwei beliebige Zeilen oder Spalten q^j, q^k gilt:

$$(q^j)^T q^k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wichtige Anwendung

lineare Gleichungssysteme: gegeben: $A \in K^{m\times n}, b \in K^n$
gesucht: $x \in K^n$, sodass $Ax = b$
Zur Lösung: Gauß-Elimniation, QR-Zerlegung

V Lösung linearer Gleichungssysteme

Aufgabe

Gegeben: $A \in K^{m \times n}$, „rechte Seite“ $b \in K^m$
Gesucht: $x \in K^n$, sodass gilt

$$Ax = b$$

„lineares Gleichungssystem“ mit m vielen Gleichungen für n unbekannte $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$

Frage

Unter welchen Bedingungen an A, b besitzt dieses lineare Gleichungssystem (LGS) eine Lösung x, und wenn sie existiert, wann ist sie eindeutig?

Beispiel

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = b$ hat eine **eindeutige** Lösung $x = b$
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $b_1 \neq 0$ oder $b_2 \neq 0$ besitzt **keine** Lösung
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2$ hat **mehr als eine** Lösung; sogar **unendlich viele** Lösungen
  $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2 - x_2$

Anmerkung

Ist $b \equiv 0$ (d.h. rechte Seite ist $\mathbf{0}$), so heißt $Ax = b$ homogen, sonst inhomogen

Vorkommen von linearen Gleichungssystemen

- Numerische Simulation, zum Beispiel Strömungsfelder um Flugzeuge, Elastizitätsprobleme, ...
  Nichtlineare Prozesse $\rightsquigarrow$ Linearisierung (mit Taylorentwicklung und Abbruch nach linearem Term) $\rightsquigarrow Ax = b$
- Anwendungen: A strukturiert, zum Beispiel *Blockmatrix* oder symmetrisch (das heißt: $a_{jk} = a_{kj}\ \forall k, j,\ A = A^T$)

- in der Regel: A hochdimensional, das heißt $n, m \sim 10^7$
- bei Lösung: möglichst Struktur ausnutzen, speziell: dünn besetzte Matrizen, das heißt: Anzahl der Nichtnulleinträge ist proportional zur Anzahl der Unbekannten $\rightsquigarrow$ iterative Algorithmen, approximative Berechnung von x, häufig durch Herkommen des linearen Gleichungssystems nicht genaue Lösung ausreichend
- im Folgenden: Algorithmen für A beliebig, nicht dünn besetzt, ohne Struktur Kosten $O(n^3)$ (für $n = m$)

Algorithmen im Folgenden basierend auf **multiplikativer** Zerlegung von A

- $A = LR$ mit

  $$L = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

  $\rightsquigarrow LRx = b$ einfach zu lösen
  (LR-Zerlegung, LU decomposition, Gauß-Elimination)
- $A = QR$ mit Q orthogonal (d.h. $Q^T = Q^{-1}$)

  $$\rightsquigarrow Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$$

  einfach zu lösen

Satz 5.1

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$. Gesucht: $x \in \mathbb{R}^n$ als Lösung von

$$(5.2) \quad Ax = b$$

Es sind äquivalent:

(i) (5.2) besitzt genau eine Lösung von $x \in \mathbb{R}^n$

(ii) A ist invertierbar, d.h. A^{-1} existiert

(iii) Das homogene System $Ax = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $x = \mathbf{0}$

Des Weiteren sind äquivalent:

(iv) $\operatorname{rang}(A) = n \quad \Leftrightarrow$ (i), (ii), (iii)

(v) $\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow$ (i), (ii), (iii)

(vi) A regulär

Für welchen Typ von Matrix ist (5.2) besonders leicht zu lösen?

- A Diagonalmatrix, das heißt $a_{jk} = 0 \ \forall j, k, j \neq k$ und $a_{jj} \neq 0 \ \forall j$
- A Dreiecksmatrix

Betrachte dazu:

$R = (r_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$ heißt obere Dreiecksmatrix, falls $r_{jk} = 0$ für $j > k$ gilt

$$R = \begin{pmatrix} & * \\ \mathbf{0} & \end{pmatrix}$$

$L = (l_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$ heißt untere Dreiecksmatrix, falls $l_{jk} = 0 \ \forall j < k$ gilt

$$L = \begin{pmatrix} & \mathbf{0} \\ * & \end{pmatrix}$$

Beachte: $L = R^T, L^T = R$ (mit entsprechenden Einträgen von L, R). Sei nun $R = \mathbb{R}^{n \times n}$ obere Dreiecksmatrix und R invertierbar. Die Lösung von $Rx = b$ mit gegebenen $b \in \mathbb{R}^n$, wie in *Algorithmus 5.3* berechenbar.

Algorithmus 5.3 Rückwärtseinsetzen

for $j = n, n-1, \ldots, 1$ **do**

$\quad x_j \leftarrow \frac{b_j - \sum\limits_{k=j+1}^{n} r_{jk} x_k}{r_{jj}}$

end for

Aufwand

Für jedes $j = n, n-1, \ldots, 1$ je $n - j$ Multiplikationen/Additionen und eine Division.

$$\text{Insgesamt: } \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \doteq \frac{n^2}{2}$$

$\Rightarrow$ Aufwand: $O(n^2)$

Beachte: Der Algorithmus ist nur wohldefiniert, wenn $r_{jj} \neq 0 \ \forall j$ ($\Leftrightarrow R$ invertierbar).

Algorithmus 5.4 Vorwärtseinsetzen

Entsprechend *Algorithmus 5.3* kann man ein System $Ly = c$ mit L untere Dreiecksmatrix durch „Vorwärtseinsetzen“ lösen.

for $j = 1, \ldots, n$ **do**

$$y_j \leftarrow \frac{c_j - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{jk} y_k}{l_{jj}}$$

end for

Beachte:

Für den Aufwand und die Wohldefiniertheit gelten analoge Regeln wie bei *Algorithmus 5.3*

Algorithmus 5.5 Gauß-Elimination

$A \in \mathbb{R}n \times n$ besitze eine Zerlegung $A = LR$ mit L untere Dreiecksmatrix und R obere Dreiecksmatrix und $r_{jj} \neq 0, l_{jj} \neq 0 \; \forall j = 1, \ldots, n$. Löse $Ax = b$ ($\Leftrightarrow L \underbrace{RX}_{=y} = b$) wie folgt:

1) $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen (*Algorithmus 5.4*) $\rightsquigarrow y$

2) $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen (*Algorithmus 5.3*) $\rightsquigarrow x$

Berechnung der LR-Zerlegung mittels elementarer Zeilenumformung

(1) Vertauschung zweier Zeilen

(2) Addition der λ-fachen j-ten Zeile ($\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$) zur k-ten Zeile, $j \neq k$

Dies kann bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ nur sinnvoll sein, wenn rechte Seite b mit berücksichtigt wird.

$\rightsquigarrow$ erweiterte Koeffizientenmatrix $(A, b) \in \mathbb{R}^{m \times n+1}$ ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$)

Mit elementaren Zeilenumformungen: (A, b) auf Zeilenstufenform bringen

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} \star & * & & & & & & & & * \\ & & \star & * & & & & & & \vdots \\ & & & & \star & * & * & & & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & & & & \star & * & * \end{array}\right) \quad \text{mit } \star \neq 0 \text{ und } * \text{ beliebig}$$

Satz 5.6

Sei (A, b) erweiterte Koeffizientenmatrix von $Ax = b$ und $(\tilde{A}, \tilde{b})$ sei durch elementare Zeilenumformungen entstanden.
$\Rightarrow (A, b)$ und $(\tilde{A}, \tilde{b})$ haben denselben Lösungsraum

$$\text{Lös}(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} \, (\subseteq \mathbb{R}^n)$$

Beweis

Es genügt zu Zeigen, dass eine Umformung von Typ (1) der Typ (2) die Lösungsmenge nicht ändert.

Typ (1)

(r-te Zeile von A mit x multipliziert)

$$\begin{aligned} a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n &= b_r \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n &= b_s \end{aligned}$$

Reihenfolge der Zeilen (mit rechter Seite!) vertauschen ändert die Lösung nicht.

Typ (2)

Es sind nur Zeile j und k betroffen:

$$\left.\begin{aligned} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n &= b_j \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}\right\} (*)$$

λ-fache der j-ten Zeile zur k-ten Zeile addiert liefert:

$$\left.\begin{gathered} a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j \\ (\lambda a_{j1} + a_{k1})x_1 + \ldots + (\lambda a_{jn} + x_{kn}x_n) \end{gathered}\right\} (**)$$

Löst nun $(x_1, \ldots, x_n)^T$ das System (*), so löst es auch die erste Gleichung von (**), da sie identisch ist.

Durch Addition der λ-fachen ersten Gleichung von (*) zur Zweiten, löst x eben auch die zweite Gleichung in (**). Umgekehrt: x löst (**) mit Substraktion der λ-fachen ersten Gleichung aus (**) wieder zu (*). $\square$

Satz

Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (nichtidentisch $\mathbf{0}$) kann man durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen.

Beispiel

Gesucht ist Lösung von $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $b \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^4$

1) Erste und zweite Zeile vertauschen

$$(A, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}\right) \overset{\mathbf{1})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}\right)$$

2) Multipliziere erste Zeile mit (-2) und addiere sie zur dritten Zeile

3) Multipliziere erste Zeile mit (-3) und addiere sie zur vierten Zeile

4) Addiere zweite Zeile zur dritten Zeile

5) Multipliziere zweite Zeile mit 3 und addiere zur vierten Zeile

$$\overset{\mathbf{2}),\mathbf{3})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -18 \end{array}\right) \overset{\mathbf{4}),\mathbf{5})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

6) Vertausche dritte und vierte Zeile

$$\overset{\mathbf{6})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Beachte: Man benötigt in der entsprechen Zeile ein Element $\neq 0$, mit dem man eliminieren kann: **Pivot-Element**.

Praktisch: Am Stabilsten ist es, als Pivotelement das betragsmäßig größte Element in k-ter Spalte zu wählen.

Gauß'sches Eliminationsverfahren

Zur Lösung von $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$:

1) Bilde erweiterte Koeffizientenmatrix (A, b)

2) Bringe (A, b) auf Zeilenstufenform $(\tilde{A}, \tilde{b})$ (mit $\tilde{a}_{ii} \neq 0$)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
\tilde{a}_{11} & & * & & \tilde{b}_1 \\
 & \tilde{a}_{22} & & & \tilde{b}_2 \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & \tilde{a}_{rr} & \tilde{b}_r \\
\hline
 & & & & \tilde{b}_{r+1} \\
 & \mathbf{0} & & & \vdots \\
 & & & & \tilde{b}_n
\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } r \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Struktur der Lösungsmenge

Gibt es ein $\tilde{b}_j \neq 0$ für ein $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, so gibt es keine Lösung, da die j-te Zeile dann wie folgt lautet:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_j \neq 0$$

Das heißt es gibt keinen Vektor x, der dies erfüllen kann. Ist dagegen

$$\tilde{b}_{r+1} = 0 = \ldots = \tilde{b}_n,$$

so gibt es eine Lösung: Man kann die Unbekannten $x_{r+1}, \ldots, x_n$ frei wählen und die anderen $x_1, \ldots, x_r$ sind dann eindeutig bestimmt.

r heißt (Zeilen-)Rang der Matrix A und $n - r$ ist die Dimension der Lösungsmenge.

Im obigen Beispiel: $r = 2$, aber $\tilde{b}_3 \neq 0$, daher keine Lösung.

Im Allgemeinen hat $(\tilde{A}, \tilde{b})$ keine Struktur mit $\tilde{a}_{jj} \neq 0$.