

Mathematik für Informatiker II

2009

Tony Lemke

24. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

I	Grundstrukturen der linearen Algebra	5
IV.1	Gruppen, Ringe, Körper	6
	Definition Verknüpfung	6
	Beispiel	6
	Definition Gruppe	6
	Beispiel	7
	Bemerkung	7
	Definition Untergruppe	7
	Bemerkung	7
	Definition	7
	Beispiel 4.1.1	8
	Satz 4.1.2	8
	Definition Ring	9
	Definition Körper	10
	Beispiel 4.1.3	11
	Beispiel 4.1.4	11
	Satz 4.1.5 Division mit Rest	12
	Beispiel	13
	Beispiel	13
	Lemma 4.1.6	13
	Definition	14
	Fundamentalsatz der Algebra [Gauss 1799]	14
	Korollar 4.1.7	14
	Lemma 4.1.7	14
	Beispiel	14
	Korollar 4.1.9	14
IV.2	Vektorräume	16
	Definition 4.2.1	16
	Rechenregeln 4.2.2 in K -Vektorraum V	16
	Beispiel 4.2.3	17
	Definition 4.2.4	18
	Beispiel 4.2.5	18
	Definition 4.2.6	19

Beispiel	20
Definition 4.2.7	20
Beispiel 4.2.8	21
Definition 4.2.9	22
Beispiel	22
Satz	22
Basisauswahlsatz	23
Beispiel	23
Satz 4.2.11	23
IV.3 Multiplikation von Matrizen und Vektoren	25
Definition	25
Beispiel	25
Zahlenbeispiele	26
Satz 4.3.1	27
Definition	28
Definition	28
Definition	29
Satz 4.3.2	29
Anmerkung	30
V Lösung linearer Gleichungssysteme	31
Beispiel	31
Vorkommen von linearen Gleichungssystemen	31
Satz 5.1	32
Algorithmus 5.3 Rückwärtseinsetzen	33
Algorithmus 5.4 Vorwärtseinsetzen	33
Algorithmus 5.5 Gauß-Elimination	34

Teil I

**Grundstrukturen der linearen
Algebra**

IV.1 Gruppen, Ringe, Körper

Definition Verknüpfung

Sei G Menge. **Verknüpfung** auf G :

Vorschrift, die zwei Elementen $a, b \in G$ ein neues Element $a * b \in G$ zuordnet, d.h. Abbildung

$$\begin{aligned} * : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

Beispiel

- a) $G = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ ($:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$) mit Addition oder Multiplikation als Verknüpfung, d.h. man kann für $a, b \in G$

$$a * b := a \cdot b \text{ oder } a * b := a + b$$

definieren (Reihenfolge egal)

- b) X Menge, $G := \text{Abb}(X, X) := \{f : X \rightarrow X, f \text{ Abbildung}\}$
Definiere für $f, g \in G$:

$$f * g = f \circ g \in G \quad \text{Reihenfolge **nicht** egal}$$

Definition Gruppe

Menge G mit Verknüpfung $*$ heißt **Gruppe**, falls die folgenden (Gruppen-)Axiome erfüllt sind:

(G1) $(a * b) * c = a * (b * c) \forall a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz)

(G2) Es gibt ein $e \in G$ (neutrales Element), sodass

a) $e * a = a \forall a \in G$

b) $\forall a \in G : a' * a = e$

Die Gruppe heißt abelsche (oder kommutativ), falls **zusätzlich**

$$a * b = b * a \forall a, b \in G$$

Häufig abkürzend: $a \cdot b$ oder ab anstelle $a*b$

Beispiel

\mathbb{Z}, \mathbb{Q} und \mathbb{R} mit $+$ sind Gruppen. $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ mit \cdot ist Gruppe, aber \mathbb{Z} mit \cdot zum Beispiel **nicht** (denn in \mathbb{Z} ist 1 neutrales Element bezüglich \cdot , aber für $a \in \mathbb{Z}$ ist $\frac{1}{a} \notin \mathbb{Z}$).

\mathbb{N}_0 mit $+$ ist auch keine Gruppe (denn neutrales Element ist 0, aber für $a \in \mathbb{N}$ ist $-a \in \mathbb{N}$ mit $a + (-a) = 0$).

Bemerkung

Für eine Gruppe mit $*$ ist neutrales Element $e \in G$ **eindeutig** bestimmt und es gilt auch $a * e = a \forall a \in G$.

Auch das inverse Element ist eindeutig bestimmt: Wir bezeichnen diese für $a \in G$ mit a^{-1} und es gilt $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Definition Untergruppe

$G' \subset G$ mit $G' \neq \emptyset$ ist:

$$\begin{aligned} a, b \in G' &\Rightarrow a * b \in G' \\ a \in G' &\Rightarrow a^{-1} \in G' \end{aligned}$$

Insbesondere ist G' mit $*$ wieder Gruppe (insbesondere ist $e \in G'$)

Bemerkung

Betrachte $G = \{a_1, a_2\}$ (zwei Elemente) \Rightarrow ein Element muss das neutrale Element sein, d.h. $a_1 := e$, setze $a := a_2$. Mit dem Gruppenaxiom folgt: $a^{-1} = a$, also $a \cdot a = e$

$*$	e	a	Symmetrie \Rightarrow abelsche Gruppe
e	e	a	
a	a	e	

Definition

G mit \cdot und H mit \odot Gruppen.

Eine Abbildung $\varphi : G \rightarrow H$ heißt (Gruppen-)Homomorphismus, falls

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b) \quad \forall a, b \in G,$$

wobei φ eine lineare Abbildung ist.

Homomorphismus heißt **Isomorphismus**, falls φ bijektiv.

Beispiel 4.1.1

- a) Seien $G = \mathbb{R}$ mit $+$ und $H = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ mit \cdot Gruppen
 $\Rightarrow \exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist Isomorphismus (Homomorphismus, da $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
 $x \mapsto e^x$
und Isomorphismus, da $x \mapsto e^x$ bijektiv).
- b) \mathbb{Z} mit $+$ ist abelsche Gruppe \Rightarrow für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ist Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi_m : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ a &\mapsto m \cdot a\end{aligned}$$

Homomorphismus, denn $m(a+b) = ma + mb$ (hier: $G = \mathbb{Z}$ mit $+$ und $H = \mathbb{Z}$ mit $+$). Sein Bild $m\mathbb{Z} := \{m \cdot a : a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$ (mit $m = 1 \Rightarrow m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ in diesem Fall zu vernachlässigen) ist **Untergruppe**, da $ma + mb = m(a+b)$ und $-mb = m(-b)$

- c) zyklische Gruppe mit m Elementen: Sei $m \in \mathbb{N}$ **fest**, zu jedem $r \in \{0, \dots, m-1\}$ betrachte $r + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z} := \{r + m \cdot a : a \in \mathbb{Z}\}$ (die um r additiv verschobene Untergruppe $m\mathbb{Z}$)

Beispiel $m = 2$: $0 + 2\mathbb{Z}$ Menge der geraden ganzen Zahlen
 $1 + 2\mathbb{Z}$ Menge der ungeraden ganzen Zahlen

Allgemein: $\mathbb{Z} = (0 + m\mathbb{Z}) \dot{\cup} (1 + m\mathbb{Z}) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} ((m-1) + m\mathbb{Z})$ *disjunkte Vereinigung*

Entscheidung zu welchem $r + m\mathbb{Z}$ eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ gehört mittels Division mit Rest:
Ist

$$\frac{a}{m} = k + \frac{r}{m} \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \text{ und } r \in \{0, \dots, m-1\}$$

$a \in r + m\mathbb{Z}$, da $a = km + r$

$\rightsquigarrow \boxed{r + m\mathbb{Z}}$ Restklasse modulo m (alle Zahlen, die bei Division durch m Rest r haben))

$a, a' \in$ derselben Restklasse, falls $a - a'$ teilbar durch m

Schreibweise: $a \equiv a' \pmod{m}$ ($:= \Leftrightarrow a - a'$ teilbar durch m)

Bezeichnung: Zu jedem $a \in \mathbb{Z}$ ist $\bar{a} := a + m\mathbb{Z}$, seine Restklasse $\rightsquigarrow \bar{a}$ „Repräsentant“ von $a + m\mathbb{Z}$. (Für $m = 2$ sind $\bar{0}, \bar{1}$ Repräsentanten von $0 + 2\mathbb{Z}$ und $1 + 2\mathbb{Z}$)

Definiere Addition von Restklassen durch $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a+b}$

Satz 4.1.2

Für $m \in \mathbb{Z}$ ist die Menge

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} := \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$$

der Restklasse modulo m mit $+$ wie oben definiert ist eine abelsche Gruppe, und die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ a &\mapsto a + m\mathbb{Z}\end{aligned}$$

ist surjektiver Homomorphismus.

Beweisskizze

Assoziativität und Kommutativität wird von \mathbb{Z} nach $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ vererbt, zum Beispiel:

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{(a + b) + c} = \overline{a + b + c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$$

Neutrales Element ist $\bar{0}$, da

$$\bar{0} + \bar{a} = \overline{0 + a} = \bar{a}$$

Inverses von \bar{a} ist $\overline{-a}$, da

$$\bar{a} + \overline{-a} = \overline{a + (-a)} = \bar{0}$$

Bezeichnung: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ heißt für $m > 0$ durch zyklische Gruppe der Ordnung m

Beispiel Rechnen mit Restklassen:

- Stundenzeiger der Uhr $\hat{=}$ Restklasse mod 12
- Wochentage $\hat{=}$ Restklasse mod 7

Definition Ring

Menge R mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned}+ : R \times R &\rightarrow R \\ (a, b) &\mapsto a + b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cdot : R \times R &\rightarrow R \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b\end{aligned}$$

heißt Ring, falls

(R1) $(R, +)$ ist abelsche Gruppe

(R2) \cdot ist assoziativ, d.h.: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \forall a, b, c$

(R3) Distributivgesetze $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Ring **kommutativ**, falls $a \cdot b = b \cdot a \forall a, b \in R$

$1 \in R$ **Einselement**, falls $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \forall a \in R$

$0 \in R$ **Nullelement**, falls $a + 0 = 0 + a = a \forall a \in R \Rightarrow 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

Beachte: Bezüglich \cdot ist kein Inverses verlangt!

Beispiel: \mathbb{Z}, \mathbb{Q} und \mathbb{R} sind mit der üblichen Addition $+$ und Multiplikation \cdot kommutative Ringe

Spezialfall: Ist R bezüglich \cdot kommutativ und zusätzlich $R \setminus \{0\}$ bezüglich \cdot abelsche Gruppe, dann ist $(R, +, \cdot)$ „Körper“

Definition Körper

Eine Menge K mit zwei Verknüpfungen

$$+ : K \times K \rightarrow K$$

$$(a, b) \mapsto a + b$$

$$\cdot : K \times K \rightarrow K$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

heißt „Körper“ („field“), wenn folgende Axiome gelten:

(K1) $(K, +)$ ist abelsche Gruppe (neutrales Element \equiv Nullelement 0)
(das zu $a \in K$ inverse Element sei $-a \in K$)

(K2) (K^*, \cdot) mit $K^* := K \setminus \{0\}$ ist abelsche Gruppe (neutrales Element: Einselement, bezeichnet mit 1; für $a \in K^*$ bezeichne a^{-1} (oder $\frac{1}{a}$), das zu a bezüglich \cdot inverse Element)

(K3) Distributivgesetze: $\forall a, b, c \in K$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Bemerkung

Folgende Rechenregeln gelten im Körper $(K, +, \cdot)$:

- $1 \neq 0 \Rightarrow \#K \geq 2$ (das heißt Körper besitzt mindestens 2 Elemente)
- $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0 \forall a \in K$

- $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
- $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ und $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
- $ab = a\tilde{b}$ und $a \neq 0 \Rightarrow b = \tilde{b}$

Beispiel 4.1.3

- a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper (Achtung: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper, da $\frac{1}{a} \notin \mathbb{Z}$)
- b) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **Körper** der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(a_1, a_2), (b_1, b_2) \mapsto (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$\text{und } \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(a_1, a_2), (b_1, b_2) \mapsto (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Nullelement ist $(0, 0)$, denn $(a_1, a_2) + (0, 0) = (a_1 + 0, a_2 + 0) = (a_1, a_2)$

Einselement ist $(1, 0)$, denn $(a_1, a_2) \cdot (1, 0) = (a_1 \cdot 1 - a_2 \cdot 0, a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1) = (a_1, a_2)$

Inverses von $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ ist

$$(a_1, a_2)^{-1} := \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right),$$

denn

$$\begin{aligned} (a_1, a_2)(a_1, a_2)^{-1} &= (a_1, a_2) \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right) \\ &= \left(a_1 \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} - a_2 \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2}, a_1 \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} + a_2 \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} \right) \\ &= \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_1 a_2 + a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right) = (1, 0) \quad (\text{da } \mathbb{R} \text{ bezüglich } \cdot \text{ kommutativ}) \end{aligned}$$

Beispiel 4.1.4

$K[t] := \{f(t) := \sum_{j=0}^n a_j t^j \text{ mit } a_0, \dots, a_n \in K\}$ (Polynome über K ; Menge aller Polynome mit Koeffizienten in K)

Hier: t Unbekannte (muss nicht aus K sein); alles einsetzbar, was sinnvoll ist.

$a \cdot t := (ta_1, ta_2)$ mit $a \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$

Monom: alle $a_i = 0$ außer einem

Nullpolynom: $a_j \forall j$ (d.h. $f \equiv 0$), d.h. $f(t) = a_r t^r$

Grad von f : $\deg f := \begin{cases} -\infty, & \text{falls } f \equiv 0 \\ \max\{r \in \mathbb{N}_0 : a_r \neq 0\}, & \text{sonst} \end{cases}$

„Natürliche“ Addition und Multiplikation in $K[t]$

Sei $f, g \in K[t]$, d.h.z.B.:

$$f(t) := \sum_{j=0}^n a_j t^j, \quad g(t) := \sum_{j=0}^m b_j t^j$$

Definiere $s := \max\{m, n\}$

$\Rightarrow (f + g)(t) := \sum_{j=0}^s (a_j + b_j) \cdot t^j$ (dabei vorausgesetzt, dass f oder g mit $a'_j s = 0$ oder $b'_j s = 0$ aufgefüllt werden können, z.B.: $f(t) = 3 + 0t + 0t^2$, $g(t) = 2 + 5t + 3t^2$
 $\Rightarrow (f + g)(t) = (3 + 2) + 5t + 3t^2$)

Des Weiteren:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(t) &= \left(\sum_{j=0}^n a_j t^j \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^m b_k t^k \right) \\ &= \sum_{r=0}^{m+n} c_r t^r \quad \text{mit } c_r := \sum_{j+k=r} a_j b_k \end{aligned}$$

$$\text{(d.h. } c_0 = a_0 + b, \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)$$

Bemerkung

K Körper $\Rightarrow (K[t], +, \cdot)$ ist kommutativer Ring („Polynomring über K “)

Beachte

Der Mangel eines Rings gegenüber einem Körper ist, dass man im Allgemeinen nicht dividieren kann, das heißt für $f \in K[t]$ ist im Allgemeinen $f^{-1}(t) := \frac{1}{f(t)} \notin K[t]$

Satz 4.1.5 Division mit Rest

$f, g \in K[t], g \neq 0$

\Rightarrow es gibt ein eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[t]$, sodass $f = q \cdot g + r$ und $\deg r < \deg g$

Beispiel

$$K = \mathbb{R}, f(t) := 3t^3 + 2t + 1, g(t) := t^2 - 4t$$

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{r} 3t^3 \\ - 3t^3 + 12t^2 \end{array} \right) : (t^2 - 4t) = 3t + 12 + \frac{50t + 1}{t^2 - 4t} \\ \hline \begin{array}{r} 12t^2 + 2t \\ - 12t^2 + 48t \\ \hline 50t \end{array} \end{array}$$

\Rightarrow Also ist hier $r(t) = 50t + 1$ und $q(t) = 3t + 12$; $\deg r = 1 < 2 = \deg g$

Beispiel

a) $f(t) := t^2 + 1$ hat keine Nullstellen in \mathbb{R} ($t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 = -1$)

b) $f(t) := t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$ hat zwei Nullstellen in \mathbb{C} , nämlich i und $-i$,
weil $i^2 = -1 \Leftrightarrow i^2 + 1 = 0$ und $(-i)^2 = i^2 = -1$

□

Lemma 4.1.6

Sei $\lambda \in K$ Nullstelle von $f \in K[t]$

$\Rightarrow \exists g \in K[t]$, sodass

- $f(t) = (t - \lambda)g(t)$

- $\deg g = \deg f - 1$

Beispiel

$\mathbb{R}, f(x) := x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ hat Nullstelle $\lambda_1 = 1$ (Wird geraten oder durch Newton-Verfahren erhalten)

$$\Rightarrow f(x) = (x - 1)g(x)$$

Polynomdivision liefert:

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \\ - x^3 + x^2 \end{array} \right) : (x - 1) = x^2 - 3x + 2 \\ \hline \begin{array}{r} - 3x^2 + 5x \\ + 3x^2 - 3x \\ \hline 2x - 2 \\ - 2x + 2 \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

also $f(x) = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$ und $\deg g = 2 = \underbrace{\deg f - 1}_3$

□

Definition

- Vielfachheit einer Nullstelle λ :
Maximales r , sodass f eine Zerlegung $f(t) = (t - \lambda)^r \cdot g(t)$ mit $g \in K[t]$ hat

Beispiel: $f(t) = (t - 1)^3 \cdot g(t) \Rightarrow$ Vielfachheit der Nullstelle $\lambda_1 = 1$ ist 3

- f zerfällt in Linearfaktoren, falls $f \in K[t]$ die Darstellung

$$f(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_m)^{r_m}$$

hat (d.h. λ_i ist Nullstelle von f mit Vielfachheit r_i)

Beispiel: $f(t) = t^2 + 1$ zerfällt über \mathbb{R} **nicht** in Linearfaktoren; aber $f(t) = t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1)$ wohl.

Fundamentalsatz der Algebra [Gauss 1799]

Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg f > 0$ hat **mindestens eine** Nullstelle in \mathbb{C}

Hat f eine Nullstelle \Rightarrow Herausdividieren mit Lemma 4.1.6 und wiederhole (da $g(t)$ wieder mindestens einen Nullstelle hat wegen Fundamentalsatz der Algebra) und \dots und kein Rest, das heißt $\deg r = 0$

Korollar 4.1.7

Jedes Polynom in $\mathbb{C}[t]$ zerfällt in Linearfaktoren (heißt natürlich nicht, dass die Nullstellen reell sind)

Lemma 4.1.7

$f \in \mathbb{R}[t]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle von f
 $\Rightarrow \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ ist auch eine Nullstelle von f , und beide haben dieselbe Vielfachheit.

Beispiel

$f(t) = t^2 + 1 \Rightarrow \lambda = i$ Nullstelle und ebenso $\bar{\lambda} = -i$; beide mit Vielfachheit 1 (Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten sind symmetrisch bezüglich der x-Achse)

Korollar 4.1.9

Jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[t]$ von **ungeradem** Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Begründung

Polynom von Grad d zerfällt über \mathbb{C} in Linearfaktoren, d.h. $r_1 + \dots + r_m = d$, jede Nullstelle in \mathbb{C} tritt mit komplex Konjugierte auf

⇒ für f mit ungeradem Grad muss es einzelne reelle Nullstelle geben

IV.2 Vektorräume

Im Folgenden: $K = (K, +, \cdot)$ stets Körper

Definition 4.2.1

Sei $(K, +, \cdot)$ Körper. Eine Menge V mit der inneren Verknüpfung

$$\begin{aligned}\oplus : V \times V &\rightarrow V && \text{(Addition)} \\ (v, w) &\mapsto v \oplus w\end{aligned}$$

und einer (äußeren) Verknüpfung

$$\begin{aligned}\cdot : K \times V &\rightarrow V && \text{ („Multiplikation mit Skalaren“ oder} \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda \cdot v && \text{ „skalare Multiplikation“)}\end{aligned}$$

heißt (K) -Vektorraum oder Vektorraum über K , falls gilt

(V1) (V, \oplus) ist abelsche Gruppe (neutrales Element: Nullvektor oder $\mathbf{0}$; Inverses von $v \in V$ heißt Negatives, bezeichnet mit $-v$)

(V2) Verträglichkeit der Multiplikation mit Skalaren:

$$\begin{aligned}- (\lambda + \mu) \cdot v &= \lambda \cdot v + \mu \cdot v \\ - \lambda \cdot (v \oplus u) &= \lambda \cdot v \oplus \lambda \cdot u \\ - (\lambda \cdot \mu) \cdot v &= \lambda \cdot (\mu \cdot v), \quad 1 \cdot v = v\end{aligned}$$

Beachte: Eine innere Verknüpfung $\cdot : V \times V \rightarrow ?$ ist (noch) nicht definierte \rightsquigarrow „inneres Produkt“, „Skalarprodukt“ $\cdot : V \times V \rightarrow K$ (\rightsquigarrow Euklidischer Vektorraum)

Rechenregeln 4.2.2 in K -Vektorraum V

- a) $0 \cdot v = \mathbf{0}$
- b) $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- c) $\lambda \cdot v = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = \mathbf{0} \vee v = \mathbf{0}$
- d) $(-1) \cdot v = -v$

Beweis von a)

$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v \oplus 0 \cdot v \Rightarrow 0 \cdot v = \mathbf{0}$, weil $0 \cdot v$ neutrales Element bezüglich Addition \oplus sein muss.

Beispiel 4.2.3

a) Standardbeispiel ist der (Standard-)Vektorraum

$$V : K^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K \right\} \text{ mit}$$

$\oplus : V \times V \rightarrow V$ (komponentenweise Addition)

$$(x, y) \mapsto \begin{array}{c} x \oplus y \\ \ddots \\ \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$\cdot : K \times V \rightarrow V$ (Multiplikation jedes

$$(\lambda, v) \mapsto \begin{array}{c} \lambda \cdot v \\ \ddots \\ \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix} \end{array} \text{ Eintrags mit Skalar})$$

b) Vektorraum der $m \times n$ -Matrizen über K

$$\begin{aligned} V := K^{m \times n} (= M(m \times n, K)) &:= \{ A = (a_{jk})_{j=1, \dots, m, k=1, \dots, n} : a_{jk} \in K \forall j, k \} \\ &= \left\{ A = (a_{jk})_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}} : a_{jk} \in K \forall j, k \right\} \end{aligned}$$

Man ordnet Matrizen in einem rechteckigen Schema an:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit m Zeilen und n Spalten.

Addition in $K^{m \times n}$

$$\begin{aligned} \oplus : K^{m \times n} \times K^{m \times n} &\rightarrow K^{m \times n} \\ (A, B) &\mapsto A \oplus B := (a_{kj} + b_{kj})_{\substack{k=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \end{aligned}$$

Skalare Multiplikation

$$\begin{aligned} \cdot : K \times K^{m \times n} &\rightarrow K^{m \times n} \\ (\lambda, A) &\mapsto \lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{kj})_{\substack{k=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \end{aligned}$$

- c) Polynomring $(K[t], +, \cdot)$ kommutativer Ring
(innere) Addition wie in (4.1.4) b)
(äußere) Multiplikation mit Skalaren:

$$\begin{aligned} \cdot : K \times K[t] &\rightarrow K[t] \\ (\lambda, f) &\mapsto (\lambda \cdot f)(t) := \lambda \left(\sum_{j=0}^n a_j t^j \right) = \sum_{j=0}^n (\lambda \cdot a_j) t^j \end{aligned}$$

Definition 4.2.4

Sei V K -Vektorraum und $W \subset V$ Teilmenge. W heißt Unter(vektor)raum von V , falls

(UV1) $W \neq 0$

(UV2) $v, w \in W \Rightarrow v \oplus w \in W$ (W abgeschlossen bezüglich \oplus)

(UV3) $\lambda \in K, v \in W \Rightarrow \lambda \cdot v \in W$ (W abgeschlossen bezüglich Multiplikation mit Skalaren)

Insbesondere: W mit \oplus, \cdot wieder Vektorraum (mit \oplus, \cdot aus V)

Beispiel 4.2.5

a)

$$W = \{0\} \text{ für } W \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \text{ für festes } a_1, a_2 \in K \right\}$$

sind Untervektorräume von \mathbb{R}^2 , aber die Menge

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \text{ für } a_1, a_2, b \in K \text{ und } b \neq 0 \right\} =: \hat{W}$$

ist kein Untervektorraum von \mathbb{R}^2 , denn $v, w \in W$, d.h. v so, dass

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

und w so, dass

$$b_1 w_1 + b_2 w_2 = 0$$

$$\Rightarrow v \oplus w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \quad \text{Zu zeigen: } v \oplus w \in W$$

$$\begin{aligned} a_1(v_1 + w_1) + a_2(v_2 + w_2) &= a_1 v_1 + a_1 w_1 + a_2 v_2 + a_2 w_2 \\ &= \underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2}_{=0} + \underbrace{a_1 w_1 + a_2 w_2}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Dagegen: \hat{W} ist kein Untervektorraum von \mathbb{R}^2 , da

$$\begin{aligned} v, w \in \hat{W} \text{ bedeutet: } a_1 v_1 + a_2 v_2 &= b \\ a_1 w_1 + a_2 w_2 &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v \oplus w &= \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \quad \text{und } a_1(v_1 + w_1) + a_2(v_2 + w_2) \\ &= \underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2}_{=b} + \underbrace{a_1 w_1 + a_2 w_2}_{=b} \\ &= 2b \neq b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v \oplus w \notin \hat{W}$$

b)

$$V = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ Funktion}\}$$

hat Untervektorräume

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[t]_d &:= \{f \in \mathbb{R}[t] \text{ mit } \deg f \leq d\} \subset \mathbb{R}[t] \\ &\subset \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ stetig}\} \subset V \end{aligned}$$

Definition 4.2.6

Familie von Vektoren $v^j \ v^1, \dots, v^r \in V$

$r \in V$ heißt **Linearkombination** von v^1, \dots, v^r , wenn es $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ gibt, sodass sich v als

$$v = \lambda_1 v^1 \oplus \lambda_2 v^2 \dots \lambda_r \oplus v^r$$

darstellen lässt.

Bezeichnung $\text{span}\{v^1, \dots, v^r\} := \{v \in V : v \text{ ist Linearkombination von } v^1, \dots, v^r\}$

Es gilt: $v^1, \dots, v^r \in V$

$\Rightarrow \text{span}\{v^1, \dots, v^r\} \subseteq V$ ist Untervektorraum

Genauer: $\text{span}\{v^1, \dots, v^r\}$ ist der **kleinste** Untervektorraum von V , der v^1, \dots, v^r enthält.

Beispiel

$V = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}$

$$\text{a) } v^1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{span}\{v^1\} = \{v \in V : v_2 = 0\}$$

$$\text{span}\{v^2\} = \{v \in V : v_1 = 0\}$$

$$\text{span}\{v^1, v^2\} = V (= \mathbb{R}^2), \text{ da sich jedes } v \in V \text{ als}$$

$$v = \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2$$

darstellen lässt.

$$\text{b) } v^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{span}\{v^1\} \subset V$$

$$\text{span}\{v^0, v^1, v^2\} = V = \text{span}\{v^0, v^2\} = \text{span}\{v^0, v^1\}$$

$$\text{Beispiel } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \text{ Finde } \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \text{ sodass } w = \lambda_0 v^0 + \lambda_1 v^1$$

\rightsquigarrow „Darstellung“ von V über span nicht „eindeutig“

\rightsquigarrow „Effiziente“ Darstellung, das heißt: Darstellung mit maximaler Anzahl aufspannender Vektoren

Definition 4.2.7

Sei V K -Vektorraum. Eine Familie von Vektoren $(v^j)_{j \in I}$ (I Indexmenge) heißt **linear unabhängig**, falls

$$\sum_{j \in I} \lambda_j v^j = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_j = 0 \text{ für alle } j \in I,$$

ansonsten linear abhängig.

Beispiel 4.2.8

a) $K = \mathbb{R}, v = \mathbb{R}^n$

Betrachte die **Einheitsvektoren**

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei der Index die Stelle der 1 angibt.

Die Familie $(e^j)_{j=1, \dots, n}$ ist linear unabhängig, denn:

Es gelte: $\sum_{j=1}^n \lambda_j e^j = \mathbf{0}$; zu Zeigen: $\lambda_j = 0 \forall j = 1, \dots, n$

Beweis

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j e^j &= \lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \dots + \lambda_n e^n = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Mit derselben Argumentation kann man auch zeigen, dass eine beliebige Teilmenge von $(e^j)_{j=1, \dots, n}$ auch linear unabhängig ist.

b) $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}[t] = \left\{ f(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j : a_j \in \mathbb{R} \right\}$

Betrachte die Monome $(t^j)_{j=0, \dots, n}$. Diese sind linear unabhängig, denn: Es gelte

$$\sum_{j=0}^n a_j t^j = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \equiv 0 \quad ((d.h. :) = 0 \forall t)$$

$$\Rightarrow a_0 = 0, a_1 = 0, \dots, a_n = 0$$

(Oder: Grad des Polynoms links und rechts anschauen)

Definition 4.2.9

Eine Familie $\mathcal{B} = (v^j)_{j \in I}$ in einem Vektorraum V heißt **Erzeugendensystem** von V , wenn

$$V = \text{span} \left(v^j \right)_{j \in I}$$

d.h. jedes $v \in V$ lässt sich als Linearkombination der v^j ($j \in I$) schreiben, d.h. jedes $v \in V$ hat Darstellung

$$v = \sum_{j \in I} \lambda_j v^j$$

mit irgendwelchen $\lambda_j \in K$.

Die Familie $\mathcal{B} = (v^j)_{j \in I}$ heißt **Basis** von V , falls

- B ein Erzeugendensystem ist **und**
- die Vektoren in B sind linear unabhängig

Ist $B = \{v^1, \dots, v^n\}$ eine Basis von V , so heißt

$$\begin{array}{ll} \#B = n & =: \dim V \\ \text{(Länge der Basis)} & \text{(Dimension des Vektorraums)} \end{array}$$

Falls B keine **endliche** Basis ist (d.h. keine Basis endlicher Länge), so setzen wir $\dim V := \infty$

Beispiel

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$

$B = \{e^1, \dots, e^n\}$ Einheitsvektoren bilden Basis von \mathbb{R}^n und $\dim \mathbb{R}^n = n$ („kanonische Basis“)

Dagegen ist $\{e^1, 2e^1, e^2, \dots, e^n\}$ keine Basis, aber ein Erzeugendensystem von V , aber es ist eine Basis von $W := \{v \in \mathbb{R}^n : v_1 = 0\}$ (erste Komponente jedes Vektors verschwindet).

b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[t]$

Die Monome $(t^j)_{j=0, \dots, n}$ bilden eine Basis für V , d.h. alle Polynome werden von Monomen erzeugt und Monome sind linear unabhängig. Da Polynomgrad beliebig sein kann, gilt $\dim \mathbb{R}[t] = \infty$.

Satz

Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Beweis

Bei $\dim V < \infty$ konstruktiv nach Basisauswahlsatz.

Basisauswahlsatz

Aus jedem endlichen Erzeugendensystem (d.h. Erzeugendensystem von V existiert mit endlich vielen Vektoren) kann man eine Basis auswählen.

Inbesondere hat jeder Vektorraum V mit $\dim V < \infty$ eine endliche Basis.

Beispiel

$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n$

Betrachte $\{e^1, 2e^1, e^2, 2e^2, \dots, e^n, 2e^n, e^1 + e^2\}$. Dies ist Erzeugendensystem von \mathbb{R}^n , alle Vektoren linearabhängig \rightsquigarrow streiche alle linearen Abhängigkeiten, aber stelle sicher, dass $\text{span}\{\dots\} = V$

$\Rightarrow \{e^1, 2e^1, e^2, 2e^2, \dots, e^n, 2e^n, e^1 + e^2 \setminus 2e^1, 2e^2, \dots, 2e^n, e^1 + e^2\}$ ist Basis, sowie $\{e^1, 2e^1, e^2, 2e^2, \dots, e^n, 2e^n, e^1 + e^2 \setminus e^1, e^2, \dots, e^n, e^1 + e^2\}$.

Satz 4.2.11

Sei $\mathcal{B} = \{v^1, \dots, v^n\}$ Familie von Vektoren in K -Vektorraum $V \neq \{0\}$. Dann ist **äquivalent**:

- (i) \mathcal{B} ist eine **Basis**, das heißt: ein lineares unabhängiges Erzeugendensystem
- (ii) \mathcal{B} ist ein **unverkürzbares** Erzeugendensystem (das heißt kein Vektor darf weggelassen werden)
- (iii) Zu jedem $v \in V$ gibt es **eindeutige** $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, sodass v die Darstellung

$$v = \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \dots + \lambda_n v^n$$

(das heißt \mathcal{B} ist Erzeugendensystem **und** eindeutige Darstellung)

- (iv) \mathcal{B} ist **unverlängerbar** unabhängig, das heißt für jedes $v \in V$ wird

$$\mathcal{B} \cup \{v\} = \{v^1, \dots, v^n, v\}$$

linear abhängig.

Beispiel für (iv)

$V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ mit $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wäre

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

linear abhängig.

Beweis

[Fi] §1.5.2

IV.3 Multiplikation von Matrizen und Vektoren

Im folgenden stets K Körper und $j, k, m, n, p, q, r, s \in \mathbb{N}$

Definition

Sei

$$A \in K^{m \times n} = \left\{ A = (a_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}, a_{jk} \in K \forall K \right\}$$

$$B \in K^{n \times p} = \left\{ B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}, b_{jk} \in K \forall K \right\}$$

Definiere Matrixprodukt $AB := A \cdot B =: C \in K^{m \times p}$

$$C = (c_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq p}} \text{ durch } c_{jk} := \sum_{r=1}^n a_{jr} b_{rk} = a_{j1} b_{1k} + \dots + a_{jn} b_{nk}$$

für $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p$

Das heißt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & \square & & \\ \circ & & & \square \end{pmatrix}$$

Beachte: Die „innere“ Matrixdimension n muss übereinstimmen, damit AB sinnvoll definiert.

Spezialfall: $m = n = p$: quadratische Matrix

Beispiel

a) $m = 1, p = 1, n \in \mathbb{N}$ beliebig

$$A = (a_{11}, \dots, a_{1n}) \in \mathbb{R}^{1 \times n}, B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Rightarrow AB = (a_{11}, \dots, a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$$

b) $m, p \in \mathbb{N}$ beliebig, $n = 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, B = (b_{11}, \dots, b_{1p}) \in \mathbb{R}^{1 \times p}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot (b_{11}, \dots, b_{1p}) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{11}b_{1p} \\ a_{21}b_{11} & \dots & a_{21}b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & \dots & a_{m1}b_{1p} \end{pmatrix}$$

c) $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig, $p = 1$ (Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor)
 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, v \in \mathbb{R}^n (= \mathbb{R}^{n \times 1})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Av &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} \\ &=: \begin{pmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} =: w \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Typisch:

- $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times p} \Rightarrow AB \in K^{m \times p}$
- $A \in K^{m \times n}, v \in K^n \Rightarrow Av \in K^m$

Zahlenbeispiele

$$\text{a) } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 3}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 3}}$$

$$\text{b) } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{3 \times 2}} \text{ nicht definiert}$$

$$\text{c) } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{3 \times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 1}}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein

$E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $E = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $E = (\delta_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$ mit

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Kronecker-Symbol}$$

heißt **Einheitsmatrix**.

Achtung:

Selbst wenn $m = n = p$, ist die Multiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$$

Satz 4.3.1

Für alle $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times p}, C \in K^{p \times q}$ gilt

$$(AB)C = A(BC)$$

Beweis

Vorraussetzungen an die Dimension erfüllt.

Setze $D := AB$, D hat Einträge $D = (d_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$ mit $d_{jk} = \sum_{r=1}^n a_{jr} b_{rk}$

$F := DC$ hat Einträge $(f_{js})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq s \leq q}}$ mit $f_{js} = \sum_{r=1}^p d_{jr} c_{rs}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f_{js} &= \sum_{r=1}^p d_{jr} c_{rs} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{r=1}^n a_{jr} b_{rk} \right) c_{ks} \\
&= \sum_{r=1}^n a_{jr} \underbrace{\sum_{k=1}^p b_{rk} c_{ks}}_{:=g_{rs}} \quad \text{Einträge von } G := BC \\
&= \sum_{r=1}^n a_{jr} g_{rs} = \text{Einträge von } A(BC)
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\forall A \in K^{m \times n}, B, C \in K^{n \times p} \\
A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\
\forall A, B \in K^{m \times n}, C \in K^{n \times p} \\
(A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C
\end{aligned}$$

Definition

$A \in K^{n \times n}$ (quadratisch!) heißt **invertierbar**, falls es ein $X \in K^{n \times n}$ gibt mit

$$A \cdot X = X \cdot A = I \quad (\text{Einheitsmatrix})$$

Bezeichnung: $X = A^{-1}$, d.h. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Inverse ist eindeutig, denn: Annahme: es gibt $X, Y \in K^{n \times n}$ mit $AX = I = XA$ und $AY = I = YA$

$$\Rightarrow \mathbf{X} = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y$$

Seien $A, B \in K^{n \times n}$ invertierbar $\Rightarrow AB$ invertierbar und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Hierbei ist die Reihenfolge zu beachten!

Beweis

A, B invertierbar, d.h. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ und $B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I$

$$\Rightarrow (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1} \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I} B = B^{-1}B = I$$

$$\Rightarrow (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A \underbrace{(BB^{-1})}_{=I} A^{-1} = I$$

Definition

Die Menge $GL(n, K) := \{A \in K^{n \times n}, A \text{ invertierbar}\}$ heißt *General Linear Group*, da sie mit der Matrixmultiplikation und I als neutralem Element eine Gruppe bildet (aber im Allgemeinen keine abelsche Gruppe)

Definition

Für $A \in K^{m \times n}$ mit $A = (a_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$ heißt

$$A^T := (a_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in K^{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

die zu A **transponierte** Matrix. (Andere Bezeichnung: A^t)

Für $v \in K^n (= K^{n \times 1})$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ist $v^T = (v_1, \dots, v_n) \in K^{1 \times n}$

Beachte

- Für $v \in K^n$ ist $vv^T \in K^{n \times n}$ $vv^T = \begin{pmatrix} v_1v_1 & \dots & v_1v_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_nv_1 & \dots & v_nv_n \end{pmatrix}$

- $v^T v \in K$, $v^T v = \sum_{j=1}^n v_j^2 = \|v\|_2^2$ (Skalarprodukt von Vektoren)

Insbesondere ist $\frac{vv^T}{v^T v}$ wohldefiniert, da $\frac{vv^T}{v^T v} = \underbrace{\frac{1}{v^T v}}_{\text{Skalar}} \cdot \underbrace{vv^T}_{\text{Matrix}}$, aber $\frac{v^T v}{vv^T}$ nicht wohldefiniert.

Satz 4.3.2

i) $A \in K^{m \times n} \Rightarrow (A^T)^T = A$

ii) $A, B \in K^{m \times n} \Rightarrow (A + B)^T = A^T + B^T$

iii) $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times p}$

$\Rightarrow (AB)^T = B^T A^T$ (Hierbei ist die Reihenfolge zu beachten!)

Beweis (iii)

$AB =: C \in K^{m \times p}$ mit $c_{jk} = \sum_{r=1}^n a_{jr} b_{rk}$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq p$
 $\Rightarrow C^T = (\tilde{c}_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq m}} \in K^{p \times m}$ mit

$$\tilde{c}_{jk} = c_{kj} = \sum_{r=1}^n a_{kr} b_{rj} \text{ und } \underbrace{\underbrace{B^T}_{\in K^{p \times n}} \underbrace{A^T}_{\in K^{n \times m}}}_{\in K^{p \times m}} \text{ hat Einträge } (B^T A^T)_{ls} = \sum_{r=1}^n b_{rl} a_{sr} \\ = \sum_{r=1}^n a_{sr} b_{rl} = c_{sl}$$

Folgerung

Für $A \in K^{n \times n}$ invertierbar ist auch A^T invertierbar und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Beweis

$$(A^{-1})^T A^T = (A A^{-1})^T = I^T = I \quad \text{und} \quad A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = I^T = I$$

Daraus folgt: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ □

Anmerkung

- $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit Q invertierbar **unitär**, falls $Q^{-1} = \overline{Q}^T$
- $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Q invertierbar heißt **orthogonal**, falls $Q^{-1} = Q^T$. „Orthogonal“ bedeutet: für zwei beliebige Zeilen oder Spalten q^j, q^k gilt:

$$(q^j)^T q^k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wichtige Anwendung

lineare Gleichungssysteme: gegeben: $A \in K^{m \times n}, b \in K^m$
 gesucht: $x \in K^n$, sodass $Ax = b$
 Zur Lösung: Gauß-Elimination, QR-Zerlegung

V Lösung linearer Gleichungssysteme

Aufgabe

Gegeben: $A \in K^{m \times n}$, „rechte Seite“ $b \in K^m$
Gesucht: $x \in K^n$, sodass gilt

$$Ax = b$$

„lineares Gleichungssystem“ mit m vielen Gleichungen für n unbekannte $x = (x_1, \dots, x_n)^T$

Frage

Unter welchen Bedingungen an A, b besitzt dieses lineare Gleichungssystem (LGS) eine Lösung x , und wenn sie existiert, wann ist sie eindeutig?

Beispiel

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = b$ hat eine **eindeutige** Lösung $x = b$
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $b_1 \neq 0$ oder $b_2 \neq 0$ besitzt **keine** Lösung
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2$ hat **mehr als eine** Lösung; sogar **unendlich viele** Lösungen
 $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2 - x_2$

Anmerkung

Ist $b \equiv 0$ (d.h. rechte Seite ist $\mathbf{0}$), so heißt $Ax = b$ homogen, sonst inhomogen

Vorkommen von linearen Gleichungssystemen

- Numerische Simulation, zum Beispiel Strömungsfelder um Flugzeuge, Elastizitätsprobleme, ...
Nichtlineare Prozesse \rightsquigarrow Linearisierung (mit Taylorentwicklung und Abbruch nach linearem Term) $\rightsquigarrow Ax = b$
- Anwendungen: A strukturiert, zum Beispiel *Blockmatrix* oder symmetrisch (das heißt: $a_{jk} = a_{kj} \forall k, j, A = A^T$)

- in der Regel: A hochdimensional, das heißt $n, m \sim 10^7$
- bei Lösung: möglichst Struktur ausnutzen, speziell: dünn besetzte Matrizen, das heißt: Anzahl der Nichtnulleinträge ist proportional zur Anzahl der Unbekannten
 \rightsquigarrow iterative Algorithmen, approximative Berechnung von x , häufig durch Herkommen des linearen Gleichungssystems nicht genaue Lösung ausreichend
- im Folgenden: Algorithmen für A beliebig, nicht dünn besetzt, ohne Struktur
 Kosten $O(n^3)$ (für $n = m$)

Algorithmen im Folgenden basierend auf **multiplikativer** Zerlegung von A

- $A = LR$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ * & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow LRx = b$ einfach zu lösen
 (LR-Zerlegung, LU decomposition, Gauß-Elimination)

- $A = QR$ mit Q orthogonal (d.h. $Q^T = Q^{-1}$)

$$\rightsquigarrow Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$$

einfach zu lösen

Satz 5.1

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$. Gesucht: $x \in \mathbb{R}^n$ als Lösung von

$$(5.2) \quad Ax = b$$

Es sind äquivalent:

- (i) (5.2) besitzt genau eine Lösung von $x \in \mathbb{R}^n$
- (ii) A ist invertierbar, d.h. A^{-1} existiert
- (iii) Das homogene System $Ax = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $x = \mathbf{0}$

Des Weiteren sind äquivalent:

- (iv) $\text{rang}(A) = n \Leftrightarrow$ (i), (ii), (iii)
- (v) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ (i), (ii), (iii)
- (vi) A regulär

Algorithmus 5.5 Gauß-Elimination

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitze eine Zerlegung $A = LR$ mit L untere Dreiecksmatrix und R obere Dreiecksmatrix und $r_{jj} \neq 0, l_{jj} \neq 0 \forall j = 1, \dots, n$. Löse $Ax = b$ ($\Leftrightarrow L \underbrace{RX}_{=y} = b$) wie folgt:

- 1) $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen (*Algorithmus 5.4*) $\rightsquigarrow y$
- 2) $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen (*Algorithmus 5.3*) $\rightsquigarrow x$