Mathematik für Informatiker I
2008/2009

Tony Lemke

10. Dezember 2008

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Aussagen, Mengen und Mathematischen Beweise

I.1 Grundlegende Definitionen

Aussage

Sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu sagen, es sei wahr (w) oder falsch (f).

Beispiele

- 2 ist eine natürliche Zahl (w)
- 2 ist eine ungerade Zahl (f)

Axiom

Aussage, die man als "wahr" vereinbart, grundlegende (Rechen-)regeln.

Beispiel

$1 + 1 = 2$

Beweis

Ein Beweis eine Aussage ist die Herleitung der Richtigkeit dieser Aussage aus Axiomen und bewiesenen Aussagen.

Seien A, B Aussagen.

Typisch:

Folgerung: $A \Rightarrow B$

Hierbei ist A die Vorraussetzung (oder auch Hypothese) für B und B die Folgerung aus A. Gesprochen wird dies als:

- "aus A folgt B"
- "A impliziert B"
- "B ist notwendig für A"
- "A ist hinreichend für B"

Beispiel

m und n sind natürliche Zahlen $\Rightarrow$ m + n ist eine natürliche Zahl

Definition [Cantor, 1895] ("set")

Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens, wobei von jedem dieser Objekte eindeutig feststeht, ob es zu dieser Menge gehört oder nicht.

Darstellung einer Menge

Durch Aufzählung seiner Objekte oder durch Beschreibung der Eigenschaften der Elemente.

Schreibweise

- $A := \{a_1, ..., a_n\}$ (Reihenfolge unwichtig)
- $a \in A$ - a ist Element der Menge A
- $a \notin A$ - a ist nicht Element der Menge A
- $\mathbb{N} := \{ \underbrace{n : n}_{\text{“Menge aller n, für die gilt..“}} \text{ ist eine natürliche Zahl}\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Seien A, B Mengen

- $A \subseteq B$ - A ist eine Teilmenge von B, d.h. jedes Element von A ist auch Element von B.
- $A \subset B$ - A ist eine echte Teilmenge von b, d.h. $B \neq A$
- $A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$ - Vereinigung von A und B
- $A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ - Durchschnitt von A und B
- $A \backslash B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ - Differenz (erfordert keine weiteren Eigenschaften von A und B)

Für $A \subseteq B$ heißt $A^C := B \backslash A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$ Komplent von A in B (“B ohne A“)

Beispiel:

$A := \{1, 2, 4, 5\}$, $B := \{2, 3, 5, 6\}$

- $A \cap B = \{2, 5\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A \backslash B = \{1, 4\}$

Der erste Beweis

Sei M eine Menge und A, B Teilmengen von M, d.h. $A, B \subseteq M$.

Zu Zeigen

$(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$

Beweis

$A^C = \{x \in M : x \notin A\}$ (laut Definition)
$B^C = \{x \in M : x \notin B\}$ (laut Definition)

$(A \cup B)^C = \{x \in M : x \notin A \cup B\}$

Zu zeigen ist: $a \in (A \cup B)^C \Rightarrow a \in A^C \cap B^C$

(Hier fängt der Beweis an)

Sei also $a \in (A \cup B)^C$, d.h. $a \in M$ und $a \notin A \cup B$
$\Rightarrow a \notin A$ und $a \notin B$
$\Rightarrow a \in A^C$ und $a \in B^C$
$\Rightarrow a \in A^C \cap B^C$

Satz beendet - wird mit einem kleinen Quadrat rechts unterhalb des Beweises gekennzeichnet.

Wichtige Mengen

- natürliche Zahlen: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$
- ganze Zahlen: $\mathbb{Z} := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- rationale Zahlen: $\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$ - Nur eine mögliche Definition

Regeln (1.1.1) beim Umgang mit Mengen

- Jede Menge A enthält jedes Element nur einmal; es gilt $a \in A$ oder $a \notin A$. Es gibt genau eine Menge, die kein Element enthält: $\emptyset := \{\}$ - die leere Menge
- Elemente von Mengen können wieder Mengen sein, z.B.:
  - $A := \{\mathbb{N}\}$ - Menge mit einem Element
  - $A := \{\mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ - Menge mit zwei Elementen

$\mathcal{P}(A)$ oder 2^A: Potenzmenge von A, z.B.: $\mathcal{P}(A) = 2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Beispiel: Barbier von Sevilla

Der Barbier rasiert genau die Männer, die sich nicht selbst rasieren.
"Def:" M := alle Männer, die der Barbier rasiert
Barbier $\in M$? Weder noch!

- Barbier $\in M \Rightarrow$ wird rasiert von Barbier $\Rightarrow$ er rasiert sich selbst $\Rightarrow$ Barbier $\notin M$
- Barbier $\notin M \Rightarrow$ er rasiert sich selbst $\Rightarrow$ Barbier $\in M$

Dies ist ein Paradoxon; Grund für das Paradoxon: „falsche" Definition einer Menge.
Menge: nach Definition: von jedem Element der Menge steht eindeutig fest, ob es zur Menge gehört oder nicht!

Aufgabe 3(ii)

Beweistechnik: *direkter* Beweis

z.Z.: $m, n \in \mathbb{Z}$, m gerade, n gerade $\Rightarrow m + n \in \mathbb{Z}$, m + n ungerade

Beweis

Sei $m \in \mathbb{Z}$ gerade und beliebig, d.h. es gibt ein $l \in \mathbb{Z}$, sodass m die Darstellung m = 2l hat. (Kurz: $m \in \mathbb{Z}$ gerade $\Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z} : m = 2l$)
Ebenso: Sei $n \in \mathbb{Z}$ ungerade $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, sodass die Darstellung n = 2k + 1 existiert.
Für die Summe gilt also:

$$m + n = 2l + 2k + 1 = 2(l + k) + 1$$

Da für jedes l und k der Ausdruck 2(l + k) gerade ist, muss 2(l + k) + 1 ungerade sein.

qed.

Definitionen

- Für $x, y \in \mathbb{R}$ definiere $min(x, y) := \begin{cases} x, & x \leq y \\ y, & \text{sonst} \end{cases}$
- Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Lemma 1.1.2

$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ (*)

Beweis

(mittels Fallunterscheidung, oft bei |o|)
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig

Fall 1: $x \geq y$

$[min(x,y) =]\ \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

$|x - y| \geq 0$, laut Definition des Betrags gilt also: $|x - y| = x - y$

$= \frac{1}{2}(x + y - (x - y)) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = \frac{1}{2}(2y) = y = min(x,y)$

Korrekt aufgeschrieben:

$min(x,y) = y = \frac{1}{2}(2y) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = \frac{1}{2}(x + y - (x - y)) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

Fall 2: x < y

$[min(x,y) =]\ \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

$|x - y| \geq 0$, laut Definition des Betrags gilt also: $|x - y| = -(x - y)$

$= \frac{1}{2}(x + y + (x - y)) = \frac{1}{2}(2x) = x = min(x,y)$

qed.

Lemma 1.1.3

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Behauptung

- a < b und c < d ⇒ a + c < b + d
- a < b und c < d ⇒ a - 2c < b - 2d

Beweis (1)

Vorraussetzung: a < b (*) und c < d (**)
$\underbrace{\Rightarrow}_{*+c} a + c < b + c \underbrace{<}_{**} b + d$

qed.

Beweis (2)

Vorraussetzung a < b (*) und c < d (**)
$\underbrace{\Rightarrow}_{*} a - 2c < b - 2c$

Gegenbeispiel überlegen: Die Aussage muss ja, wenn sie richtig ist, für jedes a, b, c, d gelten. Es reicht daher, ein Beispiel konkreter Zahlen zu finden, für das die Aussage falsch ist. (Beispieldaten müssen die Vorraussetzungen erfüllen!)
Hier: Wähle a := 0, b := 1, c := 1, d := 0
$\Rightarrow a = 0 < b = 1$ <u>erfüllt</u> und $c = -1 < d = 0$ <u>ebenfalls erfüllt</u> aber:

$$a - 2c = 0 - 2(-1) = 2 \not< 1 = 1 - 0 = b - 2d$$

Beweistechnik: Beweis durch <u>Gegenbeispiel</u>

Definitionen

- Zwei Mengen A, B heißen <u>disjunkt</u>, falls $A \cap B = \emptyset$, Schreibweise: $A \mathbin{\dot\cup} B := A \cup B$, wobei $A \cap B = \emptyset$
- Nach Definition sind für $A \subseteq B$ die Mengen A und A^C immer disjunkt und $A \cup A^C = B$
- Für eine endliche Menge M ist |M| := Anzahl der Elemente von M (|M| ist die Mächtigkeit von M)
- A, B endliche Mengen und $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$
- Allgemeiner Fall: A, B endliche Mengen $\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Beweis (Siebformel)

$|A \cup B| = |A \cup (B \backslash A)|$
$= |A| + |B \backslash A|$
$= |A| + |B \backslash (A \cap B)|$
$= |A| + |B| - |A \cap B|$

Definitionen

Für zwei Mengen A, B ist das kartesische Produkt:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

- Menge aller geordneten Paare (d.h. Reihenfolge wichtig)
- Nach Definition ist $A \times B \neq B \times A$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- Für A = B schreibt man auch $A^2 := A \times A$
- n-faches kartesisches Produkt: $A_1, \ldots, A_n$ Mengen:
  - $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n : \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i, i = 1...n\}$
  - Ist $A_i = A \ \forall i \Rightarrow A^n = \underbrace{(A \times \ldots \times A)}_{n-mal}$

Lemma

$\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$.
Beweistechnik: Beweis durch Widerspruch (indirekter Beweis)

Annahme: $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ es gibt eine natürliche Zahl, sodass $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ ist. $\frac{3}{2} = m \Leftrightarrow 3 = 2m$. 2m ist gerade, also muss 3 auch gerade sein. **Widerspruch**!

Lemma 1.1.4

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl)

Beweistechnik: Beweis durch Widerspruch (indirekter Beweis)

Wir nehmen an die Aussage ist falsch, d.h. es gibt zwei Zahlen $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$, sodass $\sqrt{2}$ die Darstellung $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ hat. Dabei sollen p und q teilerfremd sein, d.h. der

Bruch $\frac{p}{q}$ lässt sich nicht kürzen. oBdA (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) sind p und q teilerfremd.
Insbesondere folgt daraus, dass p und q nicht beide gerade sind. Dann folgt:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2 (*)$$

Dies bedeutet p^2 ist gerade $\Rightarrow p$ gerade (siehe Nebenbeweis)
$\Rightarrow$ es gibt ein $m \in \mathbb{Z}$, sodass p die Darstellung p = 2m hat.
Einsetzen in (*) liefert:

$$2q^2 = p^2 \Leftrightarrow 2q^2 = (2m)^2 = 4m^2 \Leftrightarrow q^2 = 2m^2$$

Daraus folgt: q^2 ist gerade $\Rightarrow$ q ist gerade.
Damit sind sowohl p als auch q gerade. Dies ist ein Widerspruch zu "p und q sind teilerfremd"
$\Rightarrow$ es gibt keinen Bruch zur Darstellung von $\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Nebenbeweis von Lemma 1.1.4

$(2m)^2 = 4m^2$ für $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ "Zahl gerade $\Leftrightarrow$ Zahl^2 gerade"
$(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$ für $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ "Zahl ungerade $\Leftrightarrow$ Zahl^2 ungerade"

Wichtige Mengen

- $\mathbb{Q}$: Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$: irrationale Zahlen

Beispiel

$0,\overline{9} = 0,999...9 \in \mathbb{R}$
Frage: $0,\overline{9} = 1$?
Antwort: Ja!

Beweis (algebraisch)

$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$
$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 0,999... = 0,\overline{9}$

Beweis (analytisch)

$0,\overline{9} = 0,999...$

$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + ... = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + ...\right)$$
$$= \frac{9}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n}\right) = \frac{9}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \overset{\text{Satz 2.2.1}}{=} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{\frac{9}{10}}\right) = 1$$

anderer Beweis

$\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$
$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{9} \cdot 9 = 0,999... = 0,\overline{9}$

Satz von Euklid

Eine weitere Aussage, die sich durch Widerspruch beweisen lässt ist der **Satz von Euklid**: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Definition Primzahl

Alle natürlichen Zahlen ≥ 2, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar sind, sind Primzahlen.

Beweis durch Widerspruch

Dazu nehmen wir an, die Aussage ist falsch. Sei also $P := \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ die (endliche) Menge aller Primzahlen. Betrachte dann die Zahl:

$$p := p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k + 1$$

p ist entweder eine Primzahl oder nicht. Wir zeigen, dass in beiden Fällen ein Widerspruch entsteht.

Fall 1

Angenommen, p ist eine Primzahl. Da die Menge P alle Primzahlen enthält, muss p $\in$ P sein. Widerspruch zur Definition von p, da $p > \tilde{p}$ für $\tilde{p} \in P$.

Fall 2

Angenommen, p ist keine Primzahl $\Rightarrow$ p ist durch eine Primzahl $\hat{p} \in P$ ohne Rest teilbar. $\hat{p} \in P \Rightarrow \hat{p}$ teilt $p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ ohne Rest $\Rightarrow$ (nach Definition) p geteilt durch $\hat{p}$ ergibt Rest 1. Widerspruch zu p keine Primzahl.

Beide möglichen Fälle führen zu einem Widerspruch zu der Annahme, dass P endlich ist. Also muss P unendlich sein.

Kontraposition

Eng verwandt mit dem Widerspruchsbeweis ist der Beweis durch Kontraposition:

Seien A, B Aussagen. Kontraposition einer Implikation. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Tautologie

Eine Tautologie ist eine zusammengesetzte Aussage, die unabhängig vom Wahrheitsgehalt von A und B immer wahr ist.

Beispiel 1.1.5

$m \in \mathbb{Z}$ ist durch 6 teilbar **(A)** $\Rightarrow$ m ist durch 6 teilbar **(B)**

Beweis

Wir zeigen $\neg B \Rightarrow \neg A$
$\neg B$: Sei $m \in \mathbb{Z}$ so, dass m nicht durch 2 teilbar ist, d.h. m ist ungerade. Da m ungerade ist, ist m insbesondere nicht durch 6 teilbar, d.h. $\neg A$ gilt.

Beispiel 1.1.6

Falsche Behauptung

Jedes $x \in \mathbb{R}$ löst die Gleichung 2x = 0.

Falscher Beweis

$2x = 0 \Leftrightarrow x = -x$
$\Rightarrow x^2 = x^2$
$\Leftrightarrow 0 = 0$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$.
Schlussfolgerung ist korrekt. Aber damit ist die Aussage nicht bewiesen. Richtig wäre "von unten nach oben", aber dies gilt nicht, da sich das Quadrieren nicht umkehren lässt.

A: jedes $x \in \mathbb{Q}$ B: löst 2x = 0
Zu zeigen wäre $A \Rightarrow B$
Tatsächlich im falschen Beweis gezeigt: $B \Rightarrow A$

Richtige Behauptung

x = 0 ist die einzige Lösung von 2x = 0

Richtiger Beweis

$A \Rightarrow B$**:**
2x = 0 $\Rightarrow$ x = 0, also kann höchstens x = 0 sein.

$B \Rightarrow A$**:**
x = 0 $\Rightarrow$ 2x = 0
(Diesen Satz könnte man wegen $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ einsparen)

Zum Summensymbol

$\sum$ (Sigma) Abkürzung für Summen
$\sum_{k=1}^{n} k := 1 + 2 + 3 + \cdots + n$
Bilde die Summe von k=1 bis n (stillschweigend $k \in \mathbb{Z}$)

$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$\sum_{j=0}^{2} j = \sum_{j=0}^{2} j \cdot 1 = j \cdot \sum_{j=0}^{2} 1 = j \cdot 3$ *(Ein absichtlich falsches Beispiel)*
$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot b_i = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \ldots$

Rechnen mit Summenzeichen

- $\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{n} a_k$
- $\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$
- $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (a_k \cdot b_j)$ (Doppelsumme)
- $\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{kj} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_{kj}$
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} n = \sum_{n=1}^{\infty} n$

Satz 1.1.7. arithmetische Summe

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (*)

Beweis durch Induktion über n.

I. Induktionsanfang:

Zeige, dass (*), d.h. A(n) richtig ist für n = 1. Dazu:
$\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 \frac{1(1+1)}{2}$, d.h. (*) gilt für n = 1.

II. Induktionsschritt:

Wir nehmen an, dass (*) für ein beliebiges $n \geq n_0$ gilt. d.h. es gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1}{2}$. Wir zeigen, dass dann (*) auch gilt, wenn n durch n+1 ersetzt ist. Wir starten mit (*) für n.

$\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1)$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n+1} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{2 \cdot (n+1)}{2}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ d.h. (*) ist wahr für n+1.

qed.

Satz 1.1.8. Bernoulli-Ungleichung

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (*)

Beweis durch Induktion über n.

I. Induktionsanfang:

Zeige (*) gilt für n=1
$(1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$, d.h. (*) gilt für n = 1.

II. Induktionsannahme:

(*) gelte für beliebiges $n \geq n_0$. Zeige (*) gilt auch für n + 1! Dazu: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \underset{\text{Induktionsannahme für n}}{\overset{(1+x) \geq 0}{\geq}} (1+nx)(1+x) = 1+(n+1) \cdot x = nx^2 \geq 1+(n+1) \cdot x$
d.h. (*) gilt für n+1.

qed.

1.1.9. Falsche Sätze und Behauptungen

Wird hier nicht aufgezeigt, weil es einfach nur sinnlos ist.

Intervalle

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < \infty$:

- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq a\}$ (halbgeschlossenes Intervall)
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < a\}$ (<u>un</u>eigentliches Intervall)

Produkte und Fakultät

- Produktzeichen: $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$
- Speziell: für $n \in \mathbb{N}$ ist $n! := n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 1 = \prod\limits_{k=1}^{n} k_i$ - Vereinbarung: $0! = 1$

Satz 1.1.10

Für jedes $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$ gilt:
(*) $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

(geometrische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ mit $|\mathrm{q}| < 1$)

Beweis

Induktion über n:

I.A.:

$\mathrm{n} = 0$
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q}$, d.h. (*) ist richtig für $\mathrm{n} = 0$

I.S.: $n \to n+1$

Dazu nehmen wir an, (*) gilt für n.
z.Z.: Dann gilt (*) auch für $\mathrm{n} + 1$
$\sum\limits_{k=0}^{n+1} q^k = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{\text{I.A.}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}$
$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$

Kardinalität unendlicher Mengen

Wie kann man die Mächtigkeit (d.h. die "Anzahl" der Elemente) für unendliche Mengen bestimmen? Ist $\mathbb{N}$ "größer" als $\mathbb{Z}$? Ist $\mathbb{R}$ "größer" als $\mathbb{Q}$? Dazu ein <u>Gedankenexperiment</u>.

Hilberts Hotel (David Hilbert 1862-1943)

Das Hilbertsche Hotel hat unendlich viele Zimmer. Alle Zimmer sind belegt. Kommt ein neuer Gast, kann er wie folgt untergebracht werden:

Gast in Zimmer 1 $\rightarrow$ Zimmer 2
Gast in Zimmer 2 $\rightarrow$ Zimmer 3
.
.
.
Gast in Zimmer n $\rightarrow$ Zimmer n + 1
neuer Gast $\rightarrow$ Zimmer 1

Wir können sogar mit Induktion schließen, dass jeder Gast im belegten Hotel eine Zigarre hat, obwohl keine Zigarre in das Hotel mitgebracht werden darf, denn:

Gast aus Zimmer 1 bekam 1 Zigarre von Gast aus Zimmer 2
Gast aus Zimmer 2 bekam 2 Zigarren von Gast aus Zimmer 3
Gast aus Zimmer 3 bekam 3 Zigarren von Gast aus Zimmer 4

Problem: Hier fehlt der Induktionsanfang

$\Rightarrow$ Das Prinzip des Abzählens genügt nicht um Kardinalität unendlicher Mengen eine sinnvolle Bedeutung zu geben.

I.2 Abbildungen (Funktionen)

Definition 1.2.1

Seien X, Y Mengen.

Eine Abbildung (Funktion) $f : X \to Y$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein Element aus Y, nämlich f(x) zuordnet.

Schreibweise

$f : X \to Y$ mit $x \mapsto f(x)$ "Bild von x unter f"

- X: Definitionsbereich
- Y: Werte- oder Bildbereich

Für $Z \subseteq X$ definiere:
$f(Z) := \{y \in Y : \text{es gibt ein } x \in Z \text{ mit } y = f(x)\} = \{f(x) : x \in Z\}$

Für $W \subseteq Y$ heißt

$$f^{-1}(W) := \{x \in X : f(x) \in W\}$$

Urbild von W unter f, Beachte: $f^{-1}(W) \subseteq X$

Definition 1.2.2

Für Mengen X, Y heißt die Funktion $f : X \to Y$

- surjektiv, falls zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit y = f(x)
- injektiv, falls aus $x_1 \neq x_2$ und $x_1, x_2 \in X$ folgt: $f(x_1) \neq f(x_2 >)$
- bijektiv, falls f surjektiv und injektiv ist

Definition [Cantor 1874]

Seien A, B Mengen

- A ist nicht größer als B, wenn es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.
- Ist f bijektiv, so heißen A und B gleich groß oder gleichmächtig.
- Die Menge A heißt abzählbar unendlich, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ gibt. Andernfalls heißt A überabzählbar.

Folgerung

Menge A abzählbar $\Leftrightarrow$ die Elemente von A lassen sich durchnummerieren, d.h. ist $A := \{a_1, a_2, a_3, ...\} \Rightarrow f : \mathbb{N} \to A$ $(i \mapsto a_i)$ ist surjektiv.

Beispiel

- Jede endliche Menge ist abzählbar, denn $A := \{a_1, a_2, a_3, ...\}$, Def $f : \mathbb{N} \to A$ mit $i \mapsto = \begin{cases} a_i, & 1 \leq i \leq n \\ a_1, & i > n \end{cases}$
- $\mathbb{N}$ ist nach Definition abzählbar mit f = id(Identität), $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $i \mapsto := f(i)$
- $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ abzählbar

Lemma 1.2.3

$\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

Beweis

Wir definieren die Zuordnung $1 \mapsto 0,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto -1,\ 4 \mapsto 2,\ 5 \mapsto -2,\ 6 \mapsto 3,\ 7 \mapsto -3, ...$
d.h.: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{n gerade, } n \in \mathbb{N} \\ \frac{1-n}{2}, & \text{n ungerade, } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f ist bijektiv.

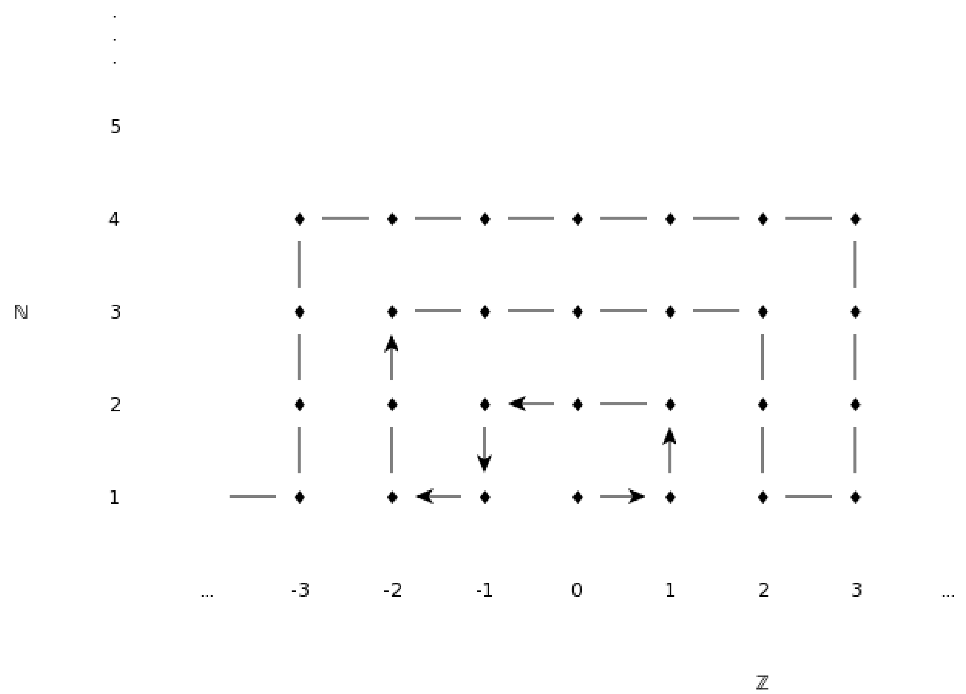
qed.

Satz 1.2.4

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beweis

Nach Definition ist $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$.
$\Rightarrow$ Jede rationale Zahl lässt sich als Bruch $\frac{p}{q}$ mit teilerfremden $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ darstellen. Wir ordnen diesen Bruch den Punkt $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ zu.



Nummeriere nun die Punkte längs des gezeichneten Streckenzugs durch, wobei die übersprungen werde, die einem Bruch mit nicht teilerfremden p und q entsprechen. Dies erzeugt eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

qed.

Ebenso beweist man, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

Satz 1.2.5

Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

Beweis

Gegebene Mengen $M_n, n \in \mathbb{N}$ (-> abzählbar viele Mengen) mit $M_n := \{x_{mn}, m \in \mathbb{N}\}$.

- Vereinigung ist $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} M_n \, (:= M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \dots)$

- Elemente: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n = \{x_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\}$

Ordne die an wie im vorigen Beweis und nummeriere sie durch.

qed.

Definition

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird ein $x_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet.)

Satz 1.2.6

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Beweis

(mit Cantorschem Diagonalverfahren)
Wegen Satz 1.2.5 genügt es zu zeigen, dass das Intervall (0, 1) nicht abzählbar ist. (da $\mathbb{R} = \mathbb{Z} \cup (0,1) \cup (0,2) \cup (-1,0) \cup \dots$)

Beweis durch Widerspruch

Angenommen, (0, 1) sei abzählbar. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, sodass $(0,\ 1) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Die Dezimaldarstellung dieser sei

$$x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots$$
$$x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots$$
$$x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots$$

$(a_{ij} \in \{0, 1, ..., 9\})$

Definiere nun eine Zahl $c \in]0,1[$ durch die Dezimaldarstellung $c := 0.c_1c_2c_3\dots$, wobei $c_k := \begin{cases} 5, & a_{kk} \neq 5 \\ 4, & a_{kk} = 5 \end{cases}$
Insbesondere ist $c_k \neq a_{kk}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Nach Annahme der Abzählbarkeit gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $c = \lambda_m$. Daraus folgt $a_{mm} = c_m$.
Einerseits Definition von x_m oben: $x_m = 0.a_{m1}...a_{mn}$, Andereseits: $x_m = c = 0.c_1...c_n$
Dies ist ein Widerspruch zur Konstruktion von c. Also ist die Annahme falsch und damit das Intervall (0, 1) überabzählbar. Insgesammt ist als $\mathbb{R}$ überabzählbar.

qed.

Wir halten fest: $\mathbb{R}$ ist substantiell größer als $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Satz 1.2.7

Die Potenzmenge (Menge aller Teilmengen von A) einer beliebigen abzählbar unendlichen Menge A ist <u>über</u>abzählbar. Insbesondere ist P($\mathbb{N}$) überabzählbar.

Satz 1.2.8

Sei X endliche Menge, sei $f : X \to X$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist injektiv

(ii) f ist surjektiv

(iii) f ist bijektiv

Beweis

Um Äquivalenz zu zeigen, kann man zeigen:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) und (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

Man kann aber auch einen Ringschluss bilden:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

X endlich, d.h. $|X| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Speziell bezeichnen wir $X := \{x_1, ..., x_n\}$ mit paarweise unterschiedenen Elementen. d.h.: $x_i \neq x_j$ für $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$.

Wir zeigen (i) $\Rightarrow$ (ii):

Dazu f injektiv, nach Definition werden $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ auf $f(x_1) \neq f(x_2)$ abgebildet. Wir haben n (paarweise verschiedene) Elemente im Definitionsbereich, die auf paarweise verschiedene Elemente in X abgebildet werden, d.h. $|f(x)| = n$. Nach Definition ($f : X \to X$) ist $f(X) \subseteq X$, also f surjektiv.

Zeige nun (ii) $\Rightarrow$ (i):

Zur Errinerung: f surjektiv $\Rightarrow$ f injektiv $\Leftrightarrow$ f nicht injektiv $\Rightarrow$ f nicht surjektiv
Beweis durch Kontraposition:
Dazu sei f nicht injektiv $\Rightarrow$ $f(x)$ kann höchstens $n - 1$ Elemente enthalten. Also ist f nicht surjektiv.

Wegen (ii) $\Rightarrow$ (i) folgt nach Definition von Surjektivität auch (ii) $\Rightarrow$ (iii). Ebenso gilt nach Definition von Bijektivität (iii) $\Rightarrow$ (i)

qed.

Teil II

Folgen und Reihen

II.1 Folgen

Errinere: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist definiert als eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Bezeichnung: x_n heißt n-tes Folgenglied, n heißt Folgenindex.
Beschreibung durch

- explizite Definition, z.B.: $x_n := n^2$
- rekursive Definition, z.B.: Fibonacci-Folge $:= \begin{cases} x_0 := 0, \\ x_1 := 1, \\ x_n := x_{n-1} + x_{n-2} \end{cases}$

Beispiel 2.1.2

(i) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_n := a\ \forall n \in \mathbb{N}$ für ein gegebenes $a \in \mathbb{R}$ (konstante Folge) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a, a, a, ...)$

(ii) Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n := (-1)^n\ \forall n \in \mathbb{N}$ (alternierende Folge) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (-1, 1, -1, 1, \dots)$

(iii) Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei $c_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$; $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$

(iv) Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right)$

Gilt für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $x_n = 0$ für alle n $>$ N für ein festes $N \in \mathbb{N}$, so nennt man $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ endliche Folge.

für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ “springen“ die Werte - Konvergenz?

für $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$

für $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 1$

Definition 2.1.3 Konvergenz

Eine Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen die Zahl x^* (den Grenzwert), falls er für jede Folgerung $\epsilon > 0$ $(\epsilon \in \mathbb{R})$ einen Index $N\ (= N_\epsilon)$ gibt, sodass gilt $|x_n - x^*| < \epsilon\ \forall n \geq N$.

Ist das der Fall, so schreiben wir $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ und nennen diese Folge <u>konvergent</u>, sonst divergent.
$\Rightarrow b_n = (-1)^n$ divergiert.

Beweis

Angenommen, Folge konvergiert gegen ein $b^* \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ nach Definition gibt es zu $\epsilon := 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass gilt: $|b_n - b^*| < 1$ für alle n > N (*)

Für alle $n \geq N$ gilt dann nach der Dreiecksungleichung

$$2 = |b_{n+1} - b_n| = |(b_{n+1} - b^*) + (b^* - b_n)| \leq |b_{n+1} - b^*| + |b^* - b_n| < 1 + 1 < 2$$

Widerspruch!

Also ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.

qed.

Definition: Konvergenz einer Folge

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt <u>konvergent</u> gegen einen Grenzwert a^*; in Zeichen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$, falls gilt: <u>für jedes</u> $\epsilon > 0$ ($\epsilon \in \mathbb{R}$) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ (das von ϵ abhängt, d.h. $N = N_\epsilon$), sodass für <u>alle</u> $n \geq N$ gilt: $|a_n - a^*| < \epsilon$
Kurz: $\forall \epsilon > 0 \exists N : |a_n - a^*| < \epsilon \; \forall n \geq N$

(Andernfalls: divergent)

Archimedisches Axiom (AA)

<u>Bisda:</u> bei vollständiger Induktion hatten wir natürliche Ordnung "$\leq$"benutzt (bzgl. $\mathbb{N}$)
Bzgl. $\mathbb{R}$ benötigen wir das Archimedische Axiom.

Für je zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $n \cdot x > y$

Folgerung 2.1.4

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{Z}$, sodass $n \leq x < n + 1$
Diese Zahl heißt $\lfloor x \rfloor$ (floor(x), untere Gaußklammern) ("größte ganze Zahl, die in x enthalten ist")

Ebenso: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $n - 1 < x \leq m$ ($\lceil x \rceil$ oder ceil(x), obere Gaußklammer)

qed.

Satz 2.1.5

Zu jedem $\epsilon > 0, x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \epsilon$

Beweis

Für $\epsilon > 0$ gegeben existiert nach Folgerung 1.2.4 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\epsilon} < n$. => $\frac{1}{n} < \epsilon$

Satz 2.1.6

Sei $b \in \mathbb{R}$; b > 0

a) b > 1 => es gibt zu jeder Konstante $K \in \mathbb{R}$, K > 0 ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $b^n > K$

b) 0 < b < 1 => es gibt zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $b^n < \epsilon$

Fortsetzung Beispiel 2.1.2

(iii)

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \frac{1}{n}$

Behauptung

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, also Grenzwert $c^* = 0$ (auch Nullfolge genannt)

Beweis

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben ($=> \frac{1}{\epsilon} \in \mathbb{R}, \frac{1}{\epsilon} > 0$). Wähle nun N als die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als $\frac{1}{\epsilon}$ (Diese existiert nach Folgerung 2.1.5). Damit folgt:
$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$ für jedes $n \geq N$. Also $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge.

qed.

(iv)

$(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := \frac{n}{n+1}$

Behauptung

Grenzwert ist $d^* = 1$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Beweis

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle wieder N als die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als $\frac{1}{\epsilon} \Rightarrow$ für jedes $n \geq N$:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon < N$$

qed.

Geometrische Bedeutung der Konvergenz

Für $\epsilon > 0$ versteht man unter ϵ-Umgebung von $a^* \in \mathbb{R}$ die Menge aller Punkte, die von a^* einen Abstand $< \epsilon$ haben, also das Intervall $(a^*-\epsilon, a^*+\epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a^*-\epsilon < x < a^*+\epsilon\}$
Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a^* bedeutet: ab einem von ϵ abhängigen Index N liegen alle Folgenmitglieder a_n in $(a^* - \epsilon, a^* + \epsilon)$, d.h. $a_n \in (a^* - \epsilon, a^* + \epsilon)$ $\forall n \geq N$.

Definition

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn es eine Konstante $\overline{a} \geq 0, \overline{a} \in \mathbb{R}$ (unabhängig von n) gibt, sodass $a_n \leq \overline{a}\ \forall n \in \mathbb{N}$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, falls es ein $\overline{a} > 0, \overline{a} \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq \overline{a}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben und unten beschränkt.

Satz 2.1.7

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folge, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$.
Wähle $\epsilon := 1 \Rightarrow$ es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a^*| < 1\ \forall n \geq N$
$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a^* + a^*| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a^*| + |a^*| \leq 1 + |a^*|$ für $n \geq N$
Setze $\overline{a} := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}, |a^*| + 1\}$
$\Rightarrow |a_n| \leq \overline{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

qed.

Bemerkung

Umkehrung gilt nicht!

Beispiel

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist zwar beschränkt: $|a_n| = 1\ \forall n$, aber $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Fortsetzung Beispiel 2.1.1

Fibonacci-Folge (rekursiv) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_0 := 0$$

$$x_1 := 1$$

$$x_n := x_{n-1} + x_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$

Behauptung

$x_{n+1} \geq n \; \forall n \in \mathbb{N}_0$

Beweis

I.A.:

n = 0: $1 = x_1 \geq 0$, n = 1: $1 = x_2 \geq 1$

I.S.: $n \rightarrow n+1$

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \overset{\text{I.A.}}{\geq} (n-1) + (n-2) = n + n - 3 \geq n$, da $n \geq 3$

qed.

Fibonacci Folge unberschränkt $\Rightarrow$ Fibonacci-Folge divergiert.

Rechenregeln für den Betrag

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & -x < 0 \end{cases}$

Für $a, b \in \mathbb{R}$:

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

Lemma 2.1.8

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n := x^n$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Das Konvergenzverhalten von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hängt vom Wert von x ab. Wir unterscheiden 4 Fälle:

Fall 1: |x| < 1

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} = 0$ (Nullfolge, in diesem Fall auch geometrische Folge)

Beweis

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aus Satz 2.1.6. folgt: für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x|^n < \epsilon$
$\Rightarrow |x^n - 0| = |x^n| \leq |x|^n < \epsilon$

Fall 2: |x| = 1

$\Rightarrow x^n = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$, also $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = 1$

Fall 3: x = -1

$\Rightarrow x^n = (-1)^n = y_n$

Folge divergiert, siehe Beispiel 2.1.2 (ii)

Fall 4: |x| > 1

Folge divergiert, denn nach Satz 2.1.6 (a) ist $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

Satz 2.1.9 (Eindeutigkeit des Limes')

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere sowohl gegen a^* als auch gegen b^*.
$\Rightarrow a^* = b^*$

Beweis

(Beweis durch Widerspruch)
Angenommen, $a^* \neq b^*$. Setze $\epsilon := \frac{1}{2}|a^* - b^*|$
Aus der Konvergenz folgt: $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a^*| < \epsilon \; \forall n \geq N_1$ und $|a_n - b^*| < \epsilon$ $foralln \geq N_2$.

Für $N := \max\{N_1, N_2\}$ gilt dann:

$$|a_n - a^*| < \epsilon \; \forall n \geq N,$$
$$|a_n - b^*| < \epsilon \; \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow |a^* - b^*| = |a^* - a_n + a_n + b^*| \geq |a^* - a_n| + |a_n - b^*| < 2\epsilon = 2 \cdot \frac{1}{2}|a^* - b^*| = |a^* - b^*|$$

Widerspruch! $|a^* - b^*| \not< |a^* - b^*| \Rightarrow a^* = b^*$

qed.

Bemerkung

Wegen dieser Aussage macht $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$ erst Sinn.

Satz 2.1.10 (Summe und Produkte von Folgen)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\underline{\text{konvergent}}$.
$\Rightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_b \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

Achtung

In die andere richtung gilt dies <u>nicht</u>!

Beispiel

$\lim\limits_{n\to\infty}(1 \cdot \frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, aber:
$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, obwohl $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Beweis

Bezeichne $a^* = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b^* = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Summe

z.Z.: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a^*+b^*$

Dazu: Sei $\epsilon>0$ vorgegeben $=>\frac{\epsilon}{2}>0$
Aus Konvergenz folgt dann: $\exists N_1, N_2\in\mathbb{N}$, sodass

$$|a_n-a^*|<\frac{\epsilon}{2}\ \forall n\geq N_1,$$
$$|b_n-b^*|<\frac{\epsilon}{2}\ \forall n\geq N_2$$

$\Rightarrow \forall n\geq N:=max\{N_1,N_2\}$ gilt:

$$|(a_n+b_n)-(a^*+b^*)|\leq|a_n-a^*|+|b_n-b^*|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

Produkt

z.Z.: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a^*\cdot b^*$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent
$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt, d.h. $\exists K>0, K\in\mathbb{R}$, sodass $|a_n|\leq K\ \forall n\in\mathbb{N}$ und $|b_n|\leq K\ \forall n\in\mathbb{N}$. Sei $\epsilon>0\Rightarrow\frac{\epsilon}{2K}>0$
Aus Konvergenz folgt: $\exists N_1,N_2\in\mathbb{N}$ mit

$$|a_n-a^*|<\frac{\epsilon}{2K}\ \forall n\geq N_1,$$
$$|b_n-b^*|<\frac{\epsilon}{2K}\ \forall n\geq N_2$$

$\Rightarrow \forall n\geq N:=max\{N_1,N_2\}$ gilt:

$$|a_nb_n-a^*b^*|=|a_nb_n-a_nb^*+a_nb^*-a^*b^*|=|a_n(b_n-b^*)+b^*(a_n-a^*)|$$
$$\leq|a_n(b_n-b^*)|+|b^*(a_n-a^*)|=|a_n||b_n-b^*|+\underbrace{|b^*|}_{\leq K}|a_n-a^*|<K\frac{\epsilon}{2K}+K\frac{\epsilon}{2K}=\epsilon$$

Korollar 2.1.11 (Linearkombination konvergenter Folgen)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow(\lambda a_n+\mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)=\lambda\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\mu\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

Korollar 2.1.12

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$
$\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ (d.h. $(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge.)

Satz 2.1.13

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b^* \neq 0$
$\Rightarrow$ Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $b_n \neq 0\ \forall n \geq n_0$; die Quotientenfolge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{b^*}$$

Beweis

Betrachte nur den Fall $a := 1\ \forall n$ (allgemeiner Fall folgt dann mit Satz 2.1.10)

Wir zeigen: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b^* \neq 0$
$\Rightarrow \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0$ ist $b_n \neq 0$

Dazu: $b^* \neq 0 \Rightarrow \frac{b^*}{2} > 0$
$\Rightarrow$ wegen Konvergenz gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass: $(*) |b^* - b_n| < \frac{|b^*|}{2}\ \forall n \geq n_0$

Andererseits: (siehe Aufgabe 14 (ii)) $|b^* - b_n| \geq |b^*| - |b_n|$

Zusammen: $\forall n \geq n_0$:

$$\frac{|b^*|}{2} > |b^* - b_n| \geq |b^*| - |b_n| \Rightarrow |b_n| > \frac{|b^*|}{2} > \underbrace{0}_{**} \; \forall n \geq n_0 \text{ insbesondere } b_n \neq 0 \text{ für } n \geq n_0$$

<u>Zeige jetzt:</u> $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b^*$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b^*}$

<u>Dazu:</u> $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent => zu vorgegeben $\epsilon > 0$ existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$:
(***) $|b_n - b^*| < \frac{\epsilon|b^*|^2}{2}$ $\forall n \geq N_1$
$\Rightarrow$ für $n \geq N := max\,\{n_0, N_1\}$:

$$\left|\frac{1}{b^*} - \frac{1}{b_n}\right| = \left|\frac{b_n - b^*}{b^* b_n}\right| = \frac{|b_n - b^*|}{|b^*||b_n|} \underbrace{<}_{***} \frac{\epsilon|b^*|^2}{2} \cdot \frac{1}{|b^*||b_n|} = \frac{\epsilon}{2}\frac{|b^*|}{|b_n|} \underbrace{\leq}_{**} \frac{\epsilon}{2}\frac{2 \cdot |b_n|}{b_n} = \epsilon$$

qed.

Beispiel 2.1.14

Grenzwert der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \frac{2n^2+n}{n^2-2}$
Es ist $c_n = \frac{2n^2+n}{n^2-2} = \frac{n^2(2+n^{-1})}{n^2(1-2n^{-2})} = \frac{2+n^{-1}}{1-2n^{-2}}$ (n > 0)

Vermutung: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 2$

Beweis

Setze $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ mit $a_n := 2 + \frac{1}{n}, b := 1 - \frac{2}{n^2}$
Es gibt $b_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Prüfe Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2+0 = 2$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} = 1-0 = 1$$

Damit: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{2}{1} = 2$

Faustregel

Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{an^m+bn^{m-1}+\dots}{cn^k+dn^{k-1}+\dots}$ mit $n,k \in \mathbb{N}_0$ und $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

- m = k $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{a}{c}$
- m < k $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- m > k $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert

Satz 2.1.15

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gelte $a_n \leq b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Beachte

Ist $a_n < b_n\ \forall n \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Beispiel

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := 0,\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \frac{1}{n}$
$\Rightarrow a_n < b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Beweis

Mit Korollar 2.1.12 genügt es, für die Differenzfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n - b_n$ zu Zeigen: $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $c_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n \geq 0$ (*)

Beweis durch Widerspruch
Angenommen, (*) gilt nicht, d.h es gibt ein $c^* > 0$, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -c^*$ und für die Wahl $\epsilon := c^*$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|c_n - (-c^*)| < c^* \ \forall n \geq N$, dies bedeutet aber $|c_n + c^*| < c^* \Rightarrow c_n < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Widerspruch zu $c_n \geq 0$!

qed.

Korollar 2.1.16

$\underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\underline{a} \leq a_n \leq \overline{a} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \underline{a} \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \overline{a}$.

II.2 (Unendliche) Reihen

Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge. Betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Partialsumme $s_m := \sum\limits_{n=0}^{m} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_m$

Die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen heißt (unendliche) Reihe. Bezeichnung $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ für:

(i) Folge $\left(\sum\limits_{n=0}^{m} a_n\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen

(ii) Falls $(s_m)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n := \lim\limits_{n=0}^{m} a_n$

Entsprechend Definition für $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ für ein $k \in \mathbb{N}$

Satz 2.2.1 (Unendliche geometrische Reihe)

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}, |x| < 1$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Beweis

Für die Partialsumme gilt nach Satz 1.1.10: $s_m := \sum\limits_{n=0}^{m} x^n = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$ für $x \neq 1$. Mit Lemma 2.1.8 müssen wir $\lim\limits_{m\to\infty} x^{m+1} = 0$, falls $|x| < 1$. Mit Satz 2.1.13 folgt als für $|x| < 1$:

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} x^n = \lim_{m\to\infty} \frac{1 - x^{m+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

Satz 2.2.2 (Linearkombination konvergenter Reihen)

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergenter Reihen, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ konvergiert und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right) + \mu \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

Beweis

Anwendung von Konv. 2.1.11 auf folgender Partialsummen

Beispiel 2.2.3

Unendliche Dezimalbrüche sind Reihen, speziell mit endlicher Periode $\in \mathbb{Q}$
Betrachte: $x := 0,08\overline{63}$ $(= 0,863636363...)$

Als Reihe ausgedrückt: $x = \frac{8}{10^2} + \frac{63}{10^4} + \frac{63}{10^6} + ... = \frac{8}{10^2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{63}{10^{4+2k}}$
Mit Satz 2.2.1 und Satz 2.2.2 folgt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{63}{10^{4+2k}} = \frac{63}{10^4} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(10^{-2})^k\right) = \frac{63}{10^4} \cdot \left(\frac{1}{1-10^2}\right) = \frac{63}{9900}$,
d.h. $x = \frac{8}{100} + \frac{63}{9900} = \frac{19}{220} \in \mathbb{R}$

Definition

Eine Folge heißt Cauchy-Folge (C-F), falls gilt: zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $(a_n - a_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Satz 2.2.4

Jede konvergente Folge (reeller Zahlen) ist eine Cauchy-Folge.

Beweis

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$.
$\Rightarrow$ zu jedem vorgegeben $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a^*| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n \geq N$
$\Rightarrow$ für alle $n, m \geq N$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a^* + a^* - a_m| \leq |a_n - a^*| + |a^* - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

qed.

Vollständigkeitsaxiom

In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy-Folge.
Wir zeigen als nächstes: Vollständigkeitsaxiom $\Leftrightarrow$ Intervallschachelungsprinzip

Betrachte dann für $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b, [a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
Länge (Durchmesser): diam([a, b]) = b - a

Intervallschachtelungsprinzip

Betrachte $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$
$I_n \subset \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall $\forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{diam}(I_n)) = 0$
$\Rightarrow \exists$ genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n \; \forall n \in \mathbb{N}_0$

Satz 2.2.5 Vollständigkeitsaxiom $\Rightarrow$ Intervallschachtelungsprinzip

Beweis

Bezeichne mit $I_n := [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}_0$ die ineinander geschachtelten Intervalle.

Wir zeigen zunächst:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Cauchy-Folge
Dazu: Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} (\text{diam}(I_n)) = 0$ gibt es zu jedem vorgegebenen $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\text{diam}(I_n) < \epsilon \ \forall n \geq N$.

qed.

$$\overset{\text{Vollständigkeitsaxiom}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = x \in \mathbb{R}$$

Weiter ist: $a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_k$ für $n \geq k$ *(da Intervalle geschachtelt)*
Mit Korollar 2.1.16 folgt: $a_k \leq x \leq b_k$, d.h. $x \in I_k \ \forall k$, d.h. es gibt einen Punkt in $I_k \ \forall k$.
Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} (\text{diam}(I_n)) = 0$ folgt, dass es nicht mehr als einen solchen Punkt x geben kann.

qed.

Satz 2.2.6 Intervallschachtelungsprinzip $\Rightarrow$ Vollständigkeitsaxiom

Beweis

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben Cauchy-Folge $\Rightarrow$ es gibt Folge $n_0 < n_1 < n_2 < ..., n_k \in \mathbb{N}_0$ mit (*) $|a_n - a_m| < 2^{-k} \ \forall n, m \geq n_k \ (k \in \mathbb{N}_0)$.

Def. $I_k := \left\{x \in \mathbb{R} : |x - a_{n_k}| \leq 2^{-k+1}\right\}$ (abgeschlossenes Intervall der Länge $2 \cdot 2^{-k+1} = 2^{-k+2}$ von a_{n_k}

$\Rightarrow I_k > I_{k+1} \ \forall k \in \mathbb{N}_0$

Beweis von $I_k > I_{k+1} \ \forall k$

Nach Definition ist $I_{k+1} = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - a_{n_{k+1}}\right| \leq 2^{-k}\right\}$
Sei $\tilde{x} \in I_{k+1} \Rightarrow \left|\tilde{x} - a_{n_{k+1}}\right| \leq 2^{-k}$ nach Definition von I_{k+1}. Wegen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge

ist außerdem: $\left|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}\right| < 2^{-k}$.

$$\Rightarrow |\tilde{x} - a_{n_k}| \underset{Dr.-Ungl.}{\leq} \left|\tilde{x} - a_{n_{k+1}}\right| + \left|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}\right| \leq 2^{-k} + 2^{-k} = 2^{-k+1}, \text{ also } x \in I_k$$

Damit sind alle Vorraussetzunge des Intervallschachtelungsprinzip erfüllt, da nach Konstruktion der I_k gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(I_k) = \lim_{k\to\infty} 2 \cdot 2^{-k+1} = 4 \cdot \lim_{k\to\infty} 2^{-k} = 0$$

$\Rightarrow$ es gibt genau ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit $x^* \in I_k \; \forall k \in \mathbb{N}_0$, d.h. $|x^* - a_{n_k}| \leq 2^{-k+1} \; \forall k \in \mathbb{N}_0$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge gilt nach Def (siehe (*)): $|a_{n_k} - a_n| < 2^{-k} \; \forall n \geq n_k$, also

$$|x^* - a_n| \underset{Dr.-Ungl.}{\leq} |x^* - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n| < 2^{-k+1} + 2^k = 2^{-k} \cdot (2+1) < 2^{-k+2}$$

und damit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x^*$, d.h. die Cauchy-Folge konvergiert, und zwar gegen $x^* \in \mathbb{R}$

qed.

Definition b-adische Brüche

Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$.
Ein (unendlicher) b-adischer Bruch ist einer Reihe

$$\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n \cdot b^{-n} \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq a_n \leq b, a_n \in \mathbb{N}_0.$$

Basis b fest gewählt

$$\Rightarrow \text{Darstellung } \pm a_{-k} a_{-k+1} a_{-k+2} \ldots a_{-1} a_0 . a_1 a_2 a_3$$

- b = 10: Dezimalbrüche (z.B.: $0.\overline{9}, 1.0, 0.2345\ldots, -10324.32$
- b = 2: dyadische Brüche ($\rightsquigarrow a_n \in \{0,1\}$) - Binärzahlen

Satz 2.2.7

Jeder b-adische Bruch ist eine Cauchy-Folge (d.h. konvergiert in $\mathbb{R}$. Umgekehrt: jedes $x \in \mathbb{R}$ lässt sich in einen b-adischen Bruch entwickeln.

Beweis siehe [F] §5

Folgerung

Jede reelle Zahl lässt sich beliebig genau durch eine rationale Zahl approximieren. ($\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$), $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, Abschluss von $\mathbb{Q}$ bzgl $|\cdot|$)

Definition Teilfolge

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge und $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Definition

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a^*$ für jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Satz 2.2.8 (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge besitzt konvergente Teilfolge.

Beweis

Der Beweis gliedert sich in mehrere Teile:

a)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt $\overset{\text{Def}}{\Longrightarrow}$ es gibt $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leq a_n \leq B \ \forall n \in \mathbb{N}_0$, d.h. $[A, B] \ \forall n$
Wir konstruieren jetzt eine Folge abgeschlossener Intervalle $I_k \subset \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) in I_k liegen unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

(ii) $I_k \subset I_{k-1}$ für $k \geq 1$

(iii) $\text{diam}(I_k) = 2^{-k} : \text{diam}(I_0)$

per Induktion:
<u>Dazu:</u> Induktionsanfang $I_0 := [A, B]$

Induktionsschritt: $k \to k+1$. Sei $I_k := [A_k, B_k]$ mit Eigenschaften (i) - (iii) bereits konstruiert. Def $M := \frac{1}{2}(A_k + B_k)$ (arithmetisches Mittel) Wegen (i) für $I_k \Rightarrow$ es liegen unendlich viele Folgenmitglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mindestens in $[A_k, M]$ oder in M, B_k; Setze dann $I_{k+1} := [A_k, M]$, andernfalls $I_{k+1} := [M, B_k]$.

Dieses I_{k+1} hat dann Eigenschaften (i) - (iii).

b)

Definiere nun induktive Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_{n_k} \in I_k \ \forall \mathbb{N}_0$ wie folgt:
Setze zum Induktionsanfang $n := 0$, d.h. $a_{n_0} := a_0$.
Induktionsschritt $k \to k+1$: unendlich viele Folgenmitglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, d.h. es gibt $n_{k+1} > n_k$ mit $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$

c)

Zeige: $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Wir zeigen: $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist Cauchy-Folge.
($\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a^* \in \mathbb{R}$ nach Vollständigkeits-Axiom)

Sei $\epsilon > 0$ und N so groß gewählt, dass $\text{diam}(I_n) < \epsilon$.
$\Rightarrow \forall k, k \geq N$:

- $a_{n_k} \in I_k \subset I_N$

- $a_{n_j} \in I_j \subset I_N$

$\left|a_{n_j} - a_{n_k}\right| \leq \operatorname{diam}(I_N) < \epsilon$

qed.

Definition Häufungspunkt

a^* heißt Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a^*$.

Beispiel 2.2.9

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$ besitzt die Häufungspunkte +1 und -1, denn $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k+1} = -1$

b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$ besitzt die Häufungspunkte +1 und -1, denn $\lim\limits_{k\to\infty} b_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) = 1$ und $\lim\limits_{k\to\infty} b_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(-1 + \frac{1}{2k+1}\right) = -1$

c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c := n$ besitzt keinen Häufungspunkt, da unbeschränkt

d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow$ es gibt nur einen Häufungspunkt, und zwar den Grenzwert

e) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n := \begin{cases} n, & \text{falls n gerade} \\ \frac{1}{n} & \text{falls n ungerade} \end{cases}$ ist beschränkt, besitzt aber Häufungspunkt 0, da Teilfolge $(e_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0$

Definition Wachstum

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt

- monoton wachsend falls $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton wachsend falls $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend falls $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend falls $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Satz 2.2.10

Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Beweis

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\overset{\text{Bolzamo-Weierstr.}}{\Rightarrow}$ es gibt Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a^*$.
Sei ϵ vorgegeben $\overset{\text{Teilfolge konv.}}{\Rightarrow}$ $\exists K \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_{n_k} - a^*| < \epsilon \; \forall k \geq K.$$

Setze $N := n_k \Rightarrow$ zu jeden $n \geq N$ gibt es ein $k \geq K$ mit $n_k \leq n < n_{k+1}$ (Definition Teilfolge). Zeige nun: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a^*. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

$\Rightarrow a_{n_k} \leq a_n \leq a_{n_{k+1}} (*)$

$\Rightarrow -a_{n_k} \geq -a_n$

$\Leftrightarrow \underbrace{a^* - a_{n_k}}_{\geq 0} \geq \underbrace{a^* - a_n}_{\geq 0}$

$\Leftrightarrow |a^* - a_{n_k}| \geq |a^* - a_n|$

$\Leftrightarrow |a^* - a_n| \leq |a^* - a_{n_k}| < \epsilon \; \forall n \geq N$, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a^*.

qed.

Exkursion 2.2.11 Rekursion und lineare Differenzverfahren

Gegeben

- Folge$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $x_0 := a, x_1 := b$ (2.2.12)
- $x_n := px_{n-1} + qx_{n-2}$ (2.2.13), $n \geq 2 \; \forall n \in \mathbb{N}$ mit $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ mit $\frac{p^2}{4} \neq -q$

Problem

x_1 nur implizit gegeben; oft mühsam für Grenzwertbetrachtung, Monotonie, Beschränktheit von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Herleitung einer expliziten Darstellung der Folge wie folgt

Betrachte (2.2.13) $\Leftrightarrow x_n - px_{n-1} - qx_{n-2} = 0$ (2.2.14), $n \geq 2$ (lineare Differenzgleichung zweiter Ordnung)

Ansatz zur Herleitung

$x_n = \lambda^n$ für ein $\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$
Einsetzen in (2.2.14) liefert: $\lambda^n - p\lambda^{n-1} - q\lambda^{n-2} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^{n-2}(\lambda^2 - p\lambda - q) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - p\lambda - q = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}}_{\neq 0 \text{ nach Vorraus.}}$
d.h. zwei Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\Rightarrow (\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erfüllen Rekursion (2.2.13)

$\Rightarrow$ auch die Linearkombination $(\alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, beliebig $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ erfüllt auch (2.2.13)

Direkt ausrechnen

Wir wissen schon: $x_n \overset{*}{=} \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n \; \forall n \in \mathbb{N}_0$.
Einsetzen Anfangswerte (2.2.12) $x_0 = a$ und $x_1 = b$, um α und β zu bestimmen.

$$n = 0: \quad a = x_0 \overset{(*)}{=} \alpha\lambda_1^0 + \beta\lambda_2^0 = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = a - \beta$$

$$n = 1: \quad b = x_1 \overset{(*)}{=} \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = (\alpha - \beta)\lambda_1 + \beta\lambda_2 \Rightarrow \beta = \tfrac{b - a\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Damit: Eindeutige Darstellung für $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$x_n = \left(a - \frac{b - a\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)\lambda_1^n + \frac{b - a\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_2^n$$

Beispiel 2.2.15

a - Aufgabe 25)

$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-2}(*)$, d.h. $p = q = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$

d.h. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x_n = \alpha(\lambda_1)^{-n} + \beta(\lambda_2)^{-n} = \alpha + \beta(-2)^{-n}$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ erfüllt (*).

$\overset{\text{Anfangswerte}}{\Rightarrow} \alpha = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}, \; \beta = \frac{2}{3}(a - b)$

$\Rightarrow x_n = \left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b\right) + \frac{2}{3}(a - b)(-2)^{-n}, n \in \mathbb{N}_0$, ist explizite Darstellung von x_n

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}(a - b) \cdot \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}(-2)^{-n}}_{\to 0} = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b.$

b - Fibonacci-Folge)

$x_0 := 0$, $x_1 := 1$, d.h. a = 0, b = 1

$x_n := x_{n-1} + x_{n-2}$, d.h. p = q = 1

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow x_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$\overset{\text{Anfangswerte}}{\Rightarrow} \alpha = -\beta,\ \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ Darstellung: $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ (Formel von Moivre-Binet)

II.3 Wurzeln

Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Die Quadratwurzel x von a die eindeutig bestimmte postitive Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$ (2.3.1)

Satz 2.3.2

Seien $a > 0$, $x_0 > 0$ reelle Zahlen.
Definiere Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $n \geq 0$
$\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent gegen die Quadratwurzel von a, d.h. die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung (2.3.1) $x^2 = a$.

Beweis

Wir beweisen diesen Satz in mehreren Schritten:

1)

Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass $x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ I.A.: n = 0: $x_0 > 0$ nach Vorraussetzung

I.S.: $n \to n+1$: Sei $x_n > 0$. Rekursion: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(\underbrace{\underbrace{x_n}_{>0} + \underbrace{\frac{a}{x_n}}_{>0}}_{>0})$

qed.
$\rightsquigarrow$ Division $\frac{a}{x_n}$ zulässig $\forall n \in \mathbb{N}$, da $x_n \neq 0$.

2)

Wir zeigen nun: $x_n^2 \geq a\ \forall n \geq 1$.
Dazu: $x_n^2 - a \overset{\text{Rekursion}}{=} \left(\frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)\right)^2 - a$

$\overset{\text{1. binom. Formel}}{=} \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) - \frac{4a}{4}$

$= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right)$

$\overset{\text{2. binom. Formel}}{=} \underbrace{\frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2}_{\geq 0} \geq 0 \Leftrightarrow x_n^2 \geq a\ \forall n \geq 1$

3)

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend für $n \geq 1$, denn

$$x_n - x_{n+1} \overset{\text{Rek.}}{=} x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}x_n - \frac{a}{2x_n}$$

$$= \frac{1}{2\underbrace{x_n}_{>0 \text{ nach } 1)}} \underbrace{\left(x_n^2 - a\right)}_{\geq 0 \text{ nach } 2)} \geq 0 \text{ , d.h. } x_n \geq x_{n+1} \; \forall n \geq 1$$

4)

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt durch 0 (nach (1) ist $x_n > 0 \; \forall n$) $\overset{\text{Satz 2.2.10}}{\Rightarrow}$ $(x_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

$\overset{\text{Satz 2.1.16}}{\Rightarrow}$ für $x^* := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ gilt $x^* \geq 0$

Berechnung des Grenzwertes: Rekursionsvorschrift $\Rightarrow (2x_n)$
$2x_{n+1}x_n = x_n^2 + a$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x^* \overset{\text{Satz 2.1.10}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot x_{n+1} = (x^*)^2$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = (x^*)^2$ und damit für $n \to 0$: $(2x^*)^2 = (x^*)^2 + a \Leftrightarrow (x^*)^2 = a$, d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent gegen Quadratwurzel von a.

(5)

Eindeutigkeit der Quadratwurzel:
Sei $v, w \in \mathbb{R}$ mit $v, w > 0$ zwei Lösungen von $x^2 = a$

$\Rightarrow 0 = a - a = v^2 - w^2 = (v - w)\underbrace{v + w}_{>0}$

$\Rightarrow v - w = 0 \quad \Rightarrow v = w$

qed.

Bezeichnung

Für $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$, bezeichnen wir die eindeutig bestimmte nichtnegative Lösung von $x^2 = a$ mit $\sqrt{a}$ (oder sqrt(a)).

Bemerkung

- Für a $=0$ hat $x^2 = a$ genau eine Lösung, nämlich x $= 0$
- Für a > 0 gibt es genau zwei Lösungen, nämlich $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$, denn $x^2 = a \Leftrightarrow 0 = x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) \Rightarrow x = \sqrt{a}$ oder $x = -\sqrt{a}$, d.h. $x = x_1$ oder $x = x_2$.
- Für a < 0 gibt es keine Lösung in $\mathbb{R}$, da $x^2 \geq 0$, aber a < 0. ($\rightsquigarrow$ komplexe Zahlen: $i^2 = -1$)

Bemerkung

Die in Satz 2.3.2 benutzte Rekursion führt auf einen Algorithmus mit sehr schneller Konvergenz (nämlich quadratischer Konvergenz) $\rightsquigarrow$ Numerik

(Spezialfall des Newton-Verfahrens:

Berechne x^* mit $f(x^*) = 0$ (für f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion) wie folgt: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Hier: $f(x) = x^2 - a \Rightarrow f'(x) = 2x$)

Satz 2.3.3

Sei $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, und $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Definiere mit Anfangswert $x_0 > 0$ Rekursion durch:

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right), n \geq 0$$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung von $x^k = a$. Diese Lösung heißt k-te Wurzel von a. Bezeichnung: $\sqrt[k]{a}$ oder $a^{\frac{1}{k}}$

Beweis

Siehe [F]

Beispiel 2.3.4

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Beweis

Def. $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
Weiter ist für $n \geq 2$:

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + \underbrace{\sqrt[n]{n} - 1}_{\overset{\text{Def.}}{=} x_n})^n = (1 + x_n)^n \overset{\text{binom. Lehrsatz}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{1^{n-k}}_{=1} x_n^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k =$$

$$\binom{n}{k} x_n^0 + \binom{n}{k} x_n^1 + \binom{n}{k} x_n^2 + \cdots = 1 + n \underbrace{x_n}_{\geq 0} + \tfrac{n(n-1)}{2} \underbrace{x_n^2}_{\geq 0} + \ldots$$

$$\geq 1 + \tfrac{n(n-1)}{2} x_n^2 \Leftrightarrow n - 1 \geq \tfrac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

$\Rightarrow$ für $n \geq 2$ multipliziere $\frac{2}{n(n-1)} \Rightarrow x_n^2 \leq \frac{2}{n} \overset{x_n \geq 0}{\Rightarrow} x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Somit gibt es für vorgegebenes $\epsilon > 0$ ein N, nämlich $N := \frac{2}{\epsilon^2}$, sodass für alle $n > N$: $|\sqrt[n]{n} - 1| \overset{\text{Def.}}{=} |x_n| < \epsilon$ (da $\epsilon^2 = \frac{2}{N}$).

qed.

II.4 Konvergenzkriterium für Reihen

Jetzt: die wichtigsten Kriterien, um Konvergenz einer Reihe sicherzustellen.

Satz 2.4.1 Kriterium von Cauchy zu Konvergenz von Reihen

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folge.

Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Leftrightarrow \begin{cases}\text{Zu jedem } \epsilon > 0 \text{ gibt es ein } N \in \mathbb{N}: \\ \left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right| < \epsilon \ \forall n \geq m \geq N.\end{cases}$

Beweis

Def: $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ (n-te Partialsumme) (siehe Anfang. II.2)

Für $n \geq n$:

$$s_n - s_{m-1} \overset{\text{Def}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Weiter ist:

(*) $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Cauchy-Folge

$\Leftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent, d.h. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent

Satz 2.4.2

Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

[($(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge) ist notwendig für Konvergenz der Reihe.]

Beweis

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\overset{\text{Satz 2.4.1}}{\Leftrightarrow}$ es gibt zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \epsilon \ \forall n \geq m \geq N.$$

Speziell für n = m folgt: $|a_n| < \epsilon \; \forall n \geq N. \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0.$

Satz 2.4.3

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}_0$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ beschränkt.

Beweis

$a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$ Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen ist monoton wachsend, d.h. $s_n \leq s_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}_0$.

$\overset{\text{Satz 2.2.10}}{\Rightarrow}$ (Konvergenz $\Leftrightarrow$ Beschränktheit)

Satz 2.4.4

Die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert!
Beachte: Dies ist ein Beispiel für $\not\Leftarrow$ in Satz 2.4.2: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge.

Beweis

Mit $a_n := \frac{1}{n}$ ist $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Betrachte spezielle Partialsumme:

$$s_{2^k} = \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$$

$= 1 + \frac{1}{2} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \sum\limits_{n=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{k}{2} \quad \{(\dots) \geq \frac{1}{2}$ für jedes (...)$\}$

d.h. $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt. $\overset{\text{Satz 2.4.3}}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergiert.

Satz 2.4.5

Reihe konvergiert absolut $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Reihe konvergiert

Beweis: [F]

Satz 2.4.6 (Majorantenkriterium)

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert, $c_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0$; und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $|a_n| \leq c_n\ \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut (d.h. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert)

Bezeichnung: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt Majorante von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

Beweis

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. $\overset{\text{Satz 2.4.1}}{\Rightarrow}$ für jedes $\epsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq m \geq N$:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} c_k\right| < \epsilon$$

Mit $|a_n| \leq c_n\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ nach Vorraussetzung folgt

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| = \sum_{k=m}^{n} c_k \overset{c_k \geq 0}{=} \left|\sum_{k=m}^{n} c_k\right| < \epsilon\ \forall n \geq m \geq N$$

qed.

Beispiel 2.4.7

a)

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$

Beweis

Definition Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mittels $a_n := \frac{n}{n+1}$ und $a_0 = 0$.
$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2-(n-1)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n^2-(n^2-1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$ (*)

Andererseits ist auch:

$a_n = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$

$\underset{a_0=0}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})$ (**) *(Teleskopsumme)*

Zusammen:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \overset{\text{Def.} \sum^{\infty}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \overset{(*)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=l}^{n} (a_k - a_{k-1}) \overset{(**)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$\overset{\text{Def } a_n}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \overset{\text{Satz 2.1.13}}{=} 1$

qed.

b)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, denn: $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ ist eine Majorante für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2$$

d.h.: Nach Anwendung von Satz 2.4.6 konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Satz 2.4.8 (Quotientenkriterium)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folge mit $a_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.
(Q) Es gebe $\Theta \in (0, 1)$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \Theta$ $\forall n \geq n_0$. $\Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut.

Beweis

Voraussetzung: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \Theta \ \forall n \geq n_0$.

Konvergenzverhalten ändert sich nicht, wenn endlich viele Folgenglieder aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ modifiziert werden. $\rightsquigarrow$ oBdA gilt $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \Theta \ \forall n \geq 0$.

$\Rightarrow |a_{n+1}| \leq \Theta a_n \leq \Theta^2 |a_{n-2}| \leq \cdots \leq \Theta^{n+1}|a_0|$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Theta^n |a_0|$ ist Majorante von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Weiter ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Theta^n |a_0| = |a_0| \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Theta^n \underset{\text{geom. Reihe - konv. wegen } \Theta<1}{=} |a_0| \frac{1}{1-\Theta}$

d.h. Majorante konvergiert $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

qed.

Beispiel 2.4.9

a)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergiert, denn für $n \geq 3$ gilt mit $a_n := \frac{n^2}{2^n}$:

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \frac{n^2}{2n^2}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$

$\overset{n\geq 3}{\leq} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} =: \Theta < 1,$

d.h. (Q) ist efüllt mit $\Theta = \frac{8}{9} \ \forall n \geq 3$, und Konvergenz folgt mit Satz 2.4.8.

b)

Man beachte, dass es <u>nicht</u> ausreicht zu prüfen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \ \forall n \geq n_0$. Die Konstante Θ muss unabhängig von n und von 1 weg beschränkt sein.
Beachte z.B. $a_n = \frac{1}{n}$ ($\rightsquigarrow$ harmonische Reihe, divergiert)

Hier: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{n}{n+1} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$, aber wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n(n+1)} = 1$ gibt es kein Θ unabhängig von n.

In diesem Fall gibt es zwar eine Konstante $\tilde{\Theta}$, für die $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq \tilde{\Theta} \ \forall n \in \mathbb{N}_0$, aber hier ist $\tilde{\Theta} = 1 \not< 1$.

c)

(Q) ist hinreichend für Konvergenz, aber nicht notwendig. Auch wenn (Q) nicht erfüllt ist, kann Reihe konvergieren!

Beispiel

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, aber mit

$$a_n := \frac{1}{n^2} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1 \; \forall n \in \mathbb{N}_0$$

gibt es kein $\Theta < 1$, sodass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \Theta \; \forall n \in \mathbb{N}_0$

II.5 Die Exponentialreihe

Definition: für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Exponentialreihe
exp(x) := $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Satz 2.5.1 Die Exponentialreihe konvergiert absolut

Beweis

Sei $x \neq 0$ fest. Setze $a_n := \frac{x^n}{n!}$

Prüfe (Q): $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x^{n+1}| \cdot n!}{(n+1)! \cdot |x^n|} = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2} =: \Theta \ \forall n \geq 2 \cdot |x|$

qed.

Definition Eulersche Zahl

e := exp(1) = $\sum\limits_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots = 2,7182\ldots$