

Formelsammlung MFI 3

22. März 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Kombinatorik	2
1.1	Übersicht	2
1.2	Permutation ("Mischen", $n=k$)	2
1.3	Kombination	2
1.4	Variation	2
2	Wahrscheinlichkeiten	3
2.1	Ereignisfeld	3
2.2	Additionssatz	3
3	bedingte Wahrscheinlichkeit	3
3.1	bedingte Wahrscheinlichkeit	3
3.2	vollständiges System	3
3.3	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit	3
3.4	Bayes Formel	4
3.5	Unabhängigkeit	4
3.6	serielle und parallele Systeme	4
4	Verteilungen	4
4.1	Verteilungsfunktion	4
4.2	Binomialverteilung	4
4.3	geometrische Verteilung	4
4.4	hypergeometrische Verteilung	5
4.5	Poisson-Verteilung	5
4.6	Dichtefunktion	5
4.7	gleichmäßige Verteilung	6
4.8	Exponentialverteilung	6
4.9	Normalverteilung	7
4.10	Erwartungswert und Varianz allgemein	7
4.11	Momente	8
4.12	Quantile	8

4.13	Tschebyschev	8
5	Erzeugung von Zufallszahlen	8
5.1	gleichverteilte Zufallszahlen	8
5.2	Erzeugung mittels Verteilungsfunktion	8
5.3	Zentraler Grenzwertsatz	9
5.3.1	Spezialfall: Moivre-Laplace	9
5.4	Stirlingformel ($n! \approx \dots$)	9
6	Mehrdimensionale Wk-Verteilung	9
6.1	Allgemein	9
6.2	Multinomialverteilung	9
6.3	zweidimensionale Normalverteilung	10
6.4	Randverteilung	10
6.5	Abhängigkeit	10
6.5.1	Unabhängigkeit	10
6.5.2	Kovarianz	11
6.5.3	Korrelationskoeffizient	11
7	Markov-Ketten	11
7.1	Allgemein	11
7.2	Klassifikation der Zustände	11
7.2.1	Erreichbarkeit	11
7.2.2	Rekurrenz	12
7.3	Stationäres Verhalten	12
8	schließende Statistik	13
8.1	Allgemein	13
8.2	Schätzungen	13
8.3	Eigenschaften von Punktschätzungen	14
8.4	Intervallschätzungen	14
9	Statistische Tests	15
9.1	Allgemein	15
9.2	Test des Mittelwerts	16
10	Verteilungstabellen	17
10.1	Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung $\Phi(z)$	17
10.2	Quantile der $N(0, 1)$ -Normalverteilung)	17
10.3	Quantile der t -Verteilung	18
10.4	Quantile der χ^2 -Verteilung	19
11	Differentiationsregeln	19
11.1	Produktregel	19
11.2	Quotientenregel	20

11.3 Kettenregel	20
12 Integrationsregeln	20
12.1 Potenzregeln	20
12.2 Partielle Integration	20
12.3 Integration durch Substitution	20
13 Logarithmusgesetze	20
13.1 Produkte	20
13.2 Quotienten	20
13.3 Summen und Differenzen	20
13.4 Potenzen	20
13.5 Wurzeln	21
13.6 Basisumrechnungen	21
13.7 Ableitung und Integral	21

1 Kombinatorik

Anordnung zu n Elementen der Größe k

1.1 Übersicht

Anzahl der Möglichkeiten	Ohne Zurücklegen ($k \leq n$)	mit Zurücklegen ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)
Geordnete Stichprobe mit Ziehen von k Kugeln (Variation, Anzahl V)	$V_{oz} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_{mz} = n^k$
Geordnete Stichprobe mit Ziehen von n Kugeln (Permutation, Anzahl P)	Vollerhebung $P_{oz} = n!$	Kugel i wird genau k_i -mal gezogen; es ist $k_1 + \dots + k_n = k$ $P_{mz} = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!}$
Ungeordnete Stichprobe mit Ziehen von k Kugeln (Kombinationen, Anzahl K)	$K_{oz} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$K_{mz} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

1.2 Permutation ("Mischen", n=k)

1. ohne Wiederholung $P_n = n!$
2. mit Wiederholung

$$n = \sum_{i=1}^j n_i$$

$$P_n^{n_1, \dots, n_j} = P_{n_1, \dots, n_j}^w = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_j!}$$

1.3 Kombination

Die Reihenfolge in der Anordnung der Elemente wird nicht berücksichtigt

1. ohne Wiederholung $K_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2. mit Wiederholung $K_{n,k}^w = \binom{n+k-1}{k}$

1.4 Variation

Reihenfolge in der Anordnung der Elemente wird berücksichtigt

1. ohne Wiederholung $V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$
2. mit Wiederholung $V_{n,k}^w = n^k$

2 Wahrscheinlichkeiten

2.1 Ereignisfeld

$\varepsilon \subset \mathbf{P}(\Omega)$ Ereignisfeld, falls gilt:

1. $\Omega \in \varepsilon$
2. $A \in \varepsilon \Rightarrow \bar{A} \in \varepsilon$
3. $A_1, A_2, \dots \in \varepsilon \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \varepsilon$

2.2 Additionssatz

Erweiterung des Additionssaxioms für Ereignisse, die möglicherweise nicht unvereinbar sind.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Für n viele Ereignisse:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, |I|=k} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

3 bedingte Wahrscheinlichkeit

3.1 bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

3.2 vollständiges System

$(A_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ vollständiges System von Ereignissen, falls gilt:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j, \quad \mathbb{P}(A_i) \neq 0$$

3.3 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$(A_i)_{i=1, \dots, n}$ vollständiges System mit $\mathbb{P}(A_i) > 0$, dann gilt für ein beliebiges B:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

3.4 Bayes Formel

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}$$

3.5 Unabhängigkeit

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

n Ereignisse A_1, \dots, A_n unabhängig, falls für alle Teilmengen A_{n_1}, \dots, A_{n_j} gilt:

$$\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_j}) = \mathbb{P}(A_{n_1}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{n_j})$$

3.6 serielle und parallele Systeme

serielles System: $\mathbb{P}(S) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

paralleles System: $\mathbb{P}(S) = 1 - \mathbb{P}(\bar{S}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_n) = 1 - (1 - \mathbb{P}(A_1)) \cdot \dots \cdot (1 - \mathbb{P}(A_n))$

4 Verteilungen

4.1 Verteilungsfunktion

$$F(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}((-\infty, z]), z \in \mathbb{R}$$

1. $F(z)$ ist monoton wachsend
2. $\lim_{z \rightarrow -\infty} F(z) = 0, \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 1$
3. $F(z)$ ist rechtsseitig stetig $\lim_{z \downarrow z_0} F(z) = F(z_0)$

4.2 Binomialverteilung

$$\mathbb{P}(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

4.3 geometrische Verteilung

erstes Auftreten von \bar{A} : $\mathbb{P}(Z = i) = p^{i-1}(1-p)$

verallgemeinerte Inverse:

$$F_X^{-1}(z) = \left\lceil \frac{\ln(1-z)}{\ln p} \right\rceil$$

4.4 hypergeometrische Verteilung

(Lotto)

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

falls $\frac{n}{M} \leq 0.05$ Ersetzung durch Binomial-Verteilung möglich

4.5 Poisson-Verteilung

(Queue)

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\mathbb{E}Z = \lambda$$

$$D^2 Z = \lambda$$

bei $n \geq 50, p \leq 0.1$ kann man die Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung ersetzen

4.6 Dichtefunktion

$f(z)$ ist eine Dichtefunktion, falls $\forall a < b : \mathbb{P}(Z \in (a, b]) = \int_a^b f(z) dz$

Eigenschaften:

1. $f(z) \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 1$

3. Verteilungsfunktion ergibt sich nach $F(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z f(x) dx$

Umgekehrt: Wenn 1 und 2 gelten, ist $f(z)$ eine Dichtefunktion

4.7 gleichmäßige Verteilung

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } z \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

⇒ Verteilungsfunktion

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{für } z < a \\ \frac{z-a}{b-a} & z \in [a, b] \\ 1 & z > b \end{cases}$$

$$\mathbb{E}Z = \frac{1}{2}(b+a)$$

$$D^2Z = \frac{(b-a)^2}{12}$$

4.8 Exponentialverteilung

(Lebensdauer ohne Alterung)

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda z} & z > 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - e^{-\lambda z} & z \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}Z = \lambda^{-1}$$

$$D^2Z = \lambda^{-2}$$

Verallgemeinerte Inverse:

$$F_X^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-y), y \in (0, 1)$$

Gedächtnislosigkeit:

$$\mathbb{P}(Z > t_1 + t_2 | Z > t_2) = \mathbb{P}(Z > t_1)$$

4.9 Normalverteilung

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Standard-Normalverteilung: $\mu = 0, \sigma = 1$

$$F(z) = \Phi(z)$$

Transformation:

$$\begin{aligned} \tilde{Z} = aZ + b \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}) &\Rightarrow \tilde{\mu} = a\mu + b, \tilde{\sigma} = |a|\sigma \\ \text{soll } \tilde{Z} \sim N(0, 1) \text{ gelten} &: \tilde{Z} = \frac{Z - \mu}{\sigma} \end{aligned}$$

Superposition:

n unabhängige normalverteilte $Z_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$

dann gilt $Z := Z_1 + \dots + Z_n \sim N(\mu, \sigma)$ mit $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n$ und $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}$

Sei $g(z_1, \dots, z_n)$ eine stetig differenzierbare Funktion und Z_1, \dots, Z_n unabhängige normalverteilte ZVen $\sim N(\mu_i, \sigma_i)$, wobei σ_i nicht zu groß ist

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(Z_1, \dots, Z_n) &\sim N(\mu, \sigma) \\ \mu &= g(\mu_1, \dots, \mu_n) \\ \sigma &= \sqrt{\left|\frac{\partial g(\mu_1, \dots, \mu_n)}{\partial z_1}\right|^2 \sigma_1^2 + \dots + \left|\frac{\partial g(\mu_1, \dots, \mu_n)}{\partial z_n}\right|^2 \sigma_n^2} \end{aligned}$$

4.10 Erwartungswert und Varianz allgemein

Erwartungswert einer Zufallsvariable Z :

$$\mathbb{E}Z = \begin{cases} \sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i p_i & Z \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz & \end{cases}$$

Erwartungswert einer durch $g(x)$ transformierten Zufallsvariable Z :

$$\mathbb{E}g(Z) = \begin{cases} \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(z_i) p_i & Z \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(z) f(z) dz & Z \text{ stetig mit Dichte } f(z) \end{cases}$$

Varianz:

$$D^2 Z = \mathbb{E}(Z - \mathbb{E}Z)^2 = \mathbb{E}Z^2 - (\mathbb{E}Z)^2$$

4.11 Momente

$M_k(Z) = \mathbb{E}Z^k$ Moment k-ter Ordnung

$M_k^a(Z) = \mathbb{E}|Z|^k$ absolutes Moment k-ter Ordnung

$M_k^c(Z) = \mathbb{E}(Z - \mathbb{E}Z)^k$ zentrales Moment k-ter Ordnung

4.12 Quantile

Sei $\alpha \in (0, 1)$, dann ist für eine Zufallsvariable Z mit Verteilungsfunktion $F(z)$ das α -Quantil z_α definiert durch $F(z_\alpha) \geq \alpha$ und $\alpha > F(z)$ für $z < z_\alpha$

4.13 Tschebyschev

für $a \in \mathbb{R}, b > 0, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{P}(|Z - a| > b) \leq \frac{M_k^a(z - a)}{b^k}$$

speziell: $a = \mathbb{E}Z$ und $k = 2$:

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}Z| > b) \leq \frac{D^2Z}{b^2}$$

5 Erzeugung von Zufallszahlen

5.1 gleichverteilte Zufallszahlen

- lineare Kongruenzmethode

$m, a, b \in \mathbb{N}, z_0 \in \mathbb{Z}^+, z_0 \leq m$

Definiere $z_{j+1} = (az_j + b) \bmod m$

Dann werden die Glieder von $x_j = \frac{z_j}{m}$ als gleichverteilt interpretiert für eine große Periodenlänge muss gelten:

- b und m teilerfremd
- jede Primzahl, die m teilt, teilt auch $a-1$
- $m \bmod 4 = 0 \Rightarrow a - 1 \bmod 4 = 0$

- Quadratmittelmethode

natürliche Zahl quadrieren, mittleren Teil der Ziffernfolge zur Bildung einer Zufallszahl benutzen

5.2 Erzeugung mittels Verteilungsfunktion

Sei $Z[0, 1]$ -gleichverteilt $\Rightarrow X := F_X^{-1}(Z)$ besitzt Verteilungsfunktion $F_X(x)$

dazu verallgemeinerte Inverse zu $F(x)$:

$F^{-1}(y) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$ mit $\inf \mathbb{R} = -\infty, \inf \emptyset = \infty$

5.3 Zentraler Grenzwertsatz

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung. Weiterhin sei $D^2 X_n =: \sigma^2 < \infty, \mathbb{E} X_n =: \mu$

Definiere nun die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $S_n = X_1 + \dots + X_n$, so folgt für $a < b$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(a < \frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \leq b \right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \leq b \right) = \Phi(b)$$

(ab $n \geq 12$ erhält man ordentliche Werte zur Annäherung an die Normalverteilung)

5.3.1 Spezialfall: Moivre-Laplace

Es wird vorausgesetzt, dass $X_i = \begin{cases} 1 & \text{mit Wk } p \\ 0 & \text{mit Wk } 1-p \end{cases}$

Sei $S_n = X_1 + \dots + X_n$ (zählt also, wie oft $X_i = 1$ eingetreten ist) $\Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge von (n, p) -binomialverteilten ZVen, wobei $p \in (0, 1)$ fest gewählt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(a < \frac{S_n - pn}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b \right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{S_n - pn}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b \right) = \Phi(b)$$

5.4 Stirlingformel ($n! \approx \dots$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n!} = 1$$

6 Mehrdimensionale Wk-Verteilung

6.1 Allgemein

$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x \wedge Y \leq y)$ heißt Verteilungsfunktion von (X, Y)

Beschreibung über Dichte: $\mathbb{P}(X \leq x \wedge Y \leq y) = F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$

$$\mathbb{P}((X, Y) \in G) = \begin{cases} \sum_{(x_i, y_j) \in G} p_{ij} & \text{diskret} \\ \iint_G f(x, y) dy dx & \text{stetig} \end{cases}$$

6.2 Multinomialverteilung

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_r = x_r) = \frac{n!}{x_1! \cdot \dots \cdot x_r!} p_1^{x_1} \cdot \dots \cdot p_r^{x_r} \text{ mit } \sum_{i=1}^r x_i = n$$

6.3 zweidimensionale Normalverteilung

$$\begin{aligned}f(\vec{z}) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{z} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1}(\vec{z} - \vec{\mu})\right) \\ \vec{z} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \\ \Delta &= \det(\Sigma), \Sigma^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & -\sigma_{XY} \\ -\sigma_{XY} & \sigma_X^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

bzw. einfacher:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{1-\rho^2} \left[\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2} - \rho \frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right]\right) \\ \text{mit } \rho &= \frac{\mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_X\sigma_Y} \text{ (Korrelationskoeffizient)}\end{aligned}$$

Für $\rho \neq 0$ besteht eine Abhängigkeit zwischen X und Y

Randdichten:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right) \\ f_Y(y) &= \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right)\end{aligned}$$

6.4 Randverteilung

Randverteilung für X:

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x \wedge Y \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) dv du \\ \Rightarrow f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dv\end{aligned}$$

6.5 Abhängigkeit

6.5.1 Unabhängigkeit

X und Y sind unabhängig, gdw. $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

Dann gilt außerdem:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f_X(x) \cdot f_Y(y) \\ \mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) \\ D^2(X+Y) &= D^2X + D^2Y\end{aligned}$$

6.5.2 Kovarianz

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$$

Kovarianz größer null: für größere X tendenziell auch Y größer

Kovarianz kleiner null: für größere X tendenziell kleinere Y

X, Y unabhängig $\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$ (Gegenrichtung \Leftarrow nur bei Normalverteilung)

6.5.3 Korrelationskoeffizient

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D^2X \cdot D^2Y}} \in [-1, 1]$$

$\rho = 1 \mid -1$: vollständige Abhängigkeit

X, Y unabhängig $\Rightarrow \rho = 0$

7 Markov-Ketten

7.1 Allgemein

ein zufälliger Prozess $X = (X(t))_{t \in \mathbb{Z}^+}$ mit endlichem oder abzählbar unendlichem Wertevorrat heißt Markov-Kette, falls

$$\mathbb{P}(X(n+1) = j | X(0) = i_0, \dots, X(n) = i_n) = \mathbb{P}(X(n+1) = j | X(n) = i_n) =: p_{ij}$$

(nur Gegenwart ist für Zukunft entscheidend, Vergangenheit nicht)

- n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeit:

$$p_{ij}^n := \mathbb{P}(X(n+m) = j | X(m) = i)$$

- Chapman-Kolmogorov-Gleichung:

r, n ganze Zahlen mit $0 \leq r \leq n$

$$p_{ij}^n = \sum_{k=0}^{N/\infty} p_{ik}^r p_{kj}^{n-r}$$

(Daraus folgt direkt $P^{(n)} = P^n$)

7.2 Klassifikation der Zustände

7.2.1 Erreichbarkeit

- j ist von i aus erreichbar ($i \rightarrow j$), falls $\exists n \in \mathbb{Z}^+ : p_{ij}^n > 0$
- i und j kommunizieren ($i \leftrightarrow j$), falls $\exists m, n \in \mathbb{N} : p_{ij}^m > 0, p_{ji}^n > 0$
- $i \leftrightarrow j$ bildet eine Äquivalenzrelation!
- Eine Markov-Kette ist irreduzibel, falls $\forall i, j \ i \leftrightarrow j$ gilt

- Periodizität:
Sei $d(i) := \text{ggT}\{n \geq 1 : p_{ii}^n > 0\}$. Dann gilt:
 - i ist aperiodisch, falls $d(i) = 1$
 - i ist periodisch, falls $d(i) > 1$

7.2.2 Rekurrenz

Sei $f_{ij}^n := \mathbb{P}(X(n) = j \mid \bigwedge_{r=1}^{n-1} (X(r) \neq j) \mid X(0) = i)$
(Übergang von i nach j in genau n Schritten)

dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass i irgendwann nach j übergeht gerade

$$f_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} f_{ij}^n$$

- i ist rekurrent, falls $f_{ii} = 1$
- i ist transient, falls $f_{ii} < 1$

Unterteilung der rekurrenten Zustände:

Sei T_i der erste zufällige Zeitpunkt, zu dem man von i aus wieder i erreicht, so gilt:

$$\mathbb{E}T_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_{ii}^n n =: \mu_i$$

- $\mu_i = \infty$: i ist null-rekurrent
- $\mu_i < \infty$: i ist positiv-rekurrent

andere Möglichkeit der Rekurrenz-Definition:

- i ist rekurrent, gdw. $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n = \infty$
- i ist transient, gdw. $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n < \infty$

Wenn i rekurrent ist und $i \leftrightarrow j$ gilt, dann ist auch j rekurrent

Eine irreduzible Markov-Kette ist für $p=q$ rekurrent, ansonsten transient

7.3 Stationäres Verhalten

Eine stationäre Verteilung π^* ist gegeben durch $\pi^* = \pi^*P = \dots = \pi^*P^{(n)}$

Sei eine irreduzible Markov-Kette gegeben, dann ist äquivalent:

1. Es existiert eine stationäre Verteilung π^*
2. Alle Zustände sind positiv rekurrent

speziell für 2x2 Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lässt sich π^* berechnen durch

$$\begin{aligned}\pi_0^* &= a \cdot \pi_0^* + c \cdot \pi_1^* \\ \pi_1^* &= b \cdot \pi_0^* + d \cdot \pi_1^*\end{aligned}$$

...ansonsten Bestimmung mittels Eigenvektoren

8 schließende Statistik

8.1 Allgemein

Gegeben sei eine Zufallsvariable (Grundgesamtheit) X , als mathematische Stichprobe vom Umfang n bezeichnet man X_1, \dots, X_n mit den Eigenschaften

- die X_i besitzen die gleiche Wahrscheinlichkeits-Verteilung wie X
- die X_i sind untereinander vollständig unabhängig

$\Rightarrow x_1, \dots, x_n$ ist die konkrete Stichprobe

8.2 Schätzungen

Gegeben sei die Stichprobe X_1, \dots, X_n und die Funktion $T(x_1, \dots, x_n)$ mit Wertevorrat in \mathbb{R} . Die Zufallsvariable $T(X_1, \dots, X_n)$ ist eine mathematische Stichprobenfunktion/Schätzung.

- arithmetisches Mittel (für Erwartungswert)

$$\bar{X} = T(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- Stichprobenmedian
ordne X_1, \dots, X_n der Größe nach zu X_1^*, \dots, X_n^*

$$\Rightarrow X_{0.5} = \begin{cases} X_{\frac{n+1}{2}}^* & \text{n ungerade} \\ \frac{1}{2}(X_{\frac{n}{2}}^* + X_{\frac{n}{2}+1}^*) & \text{n gerade} \end{cases}$$

- Varianz-Schätzung

$$\tilde{S}^2 = T(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$S^2 = T(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

- Schätzung für $\mathbb{P}(A)$: relative Häufigkeit

$$H_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_A(X_i)$$

mit $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

8.3 Eigenschaften von Punktschätzungen

- Sei X_1, \dots, X_n eine Stichprobe. $T(X_1, \dots, X_n)$ heißt erwartungstreu für den Parameter p der Grundgesamtheit X , falls $\mathbb{E}T(X_1, \dots, X_n) = p$
- $T(X_1, \dots, X_n)$ heißt asymptotisch erwartungstreu, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}T(X_1, \dots, X_n) = p$
- T heißt konsistent für den Parameter p , falls $\forall \varepsilon > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|T(X_1, \dots, X_n) - p| > \varepsilon) = 0$
- T_1 heißt effizienter als T_2 , falls $D^2T_1 < D^2T_2$

8.4 Intervallschätzungen

Sei X_1, \dots, X_n eine Stichprobe. Dann ist das zweiseitige Konfidenzintervall für den Parameter p der Grundgesamtheit X in Abhängigkeit von der Irrtumswahrscheinlichkeit α definiert durch:

$$\mathbb{P}(p \in (G_u^\alpha(X_1, \dots, X_n), G_o^\alpha(X_1, \dots, X_n))) = 1 - \alpha$$

1. Intervall für Mittelwert bei Grundgesamtheit $\sim N(\mu, \sigma)$ und bekannter Varianz
Sei X_1, \dots, X_n die Stichprobe aus X

$$\begin{aligned} \Rightarrow X_1 + \dots + X_n &\sim N(n \cdot \mu, \sqrt{n}\sigma) \\ \stackrel{in}{\Rightarrow} \bar{X} &\sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ \Rightarrow Y = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} &\sim N(0, 1) \\ \Rightarrow \mathbb{P}(-g < \bar{X} - \mu < g) &= \mathbb{P}\left(\frac{-g}{\sigma} \sqrt{n} < Y < \frac{g}{\sigma} \sqrt{n}\right) \\ = \Phi\left(\frac{g}{\sigma} \sqrt{n}\right) - \Phi\left(-\frac{g}{\sigma} \sqrt{n}\right) &= 2\Phi\left(\frac{g}{\sigma} \sqrt{n}\right) - 1 \stackrel{!}{=} 1 - \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi\left(\frac{g}{\sigma}\sqrt{n}\right) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \\ \Rightarrow g &= y_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \text{einseitig} \quad g &= y_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

2. bei unbekannter Varianz

S^2 wird als Schätzung für die Varianz benutzt. \bar{X} wird somit folgendermaßen transformiert:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n} &=: T_{n-1} \\ \mathbb{P}\left(\mu \in \left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

T_{n-1} ist die Studentverteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden, $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ ein zugehöriges Quantil

3. Intervallschätzung für die Varianz bei Grundgesamtheit $X \sim N(\mu, \sigma)$
Zweiseitig:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}\right)$$

$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2$ ist ein Quantil der χ^2 -Verteilung

4. Intervallschätzung für $\mathbb{P}(A)$

$$\left(h_n(A) - y_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{h_n(A)(1-h_n(A))}{n}}, h_n(A) + y_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{h_n(A)(1-h_n(A))}{n}}\right)$$

9 Statistische Tests

9.1 Allgemein

H_0 : Nullhypothese

H_a : Alternativ-Hypothese, falls H_0 nicht angenommen wird

kritischer Bereich: Bereich, in dem \bar{x} liegen muss, damit H_0 abgelehnt wird

α -Fehler: H_0 wird abgelehnt, obwohl sie zutrifft

β -Fehler: H_0 wird nicht abgelehnt, obwohl falsch

9.2 Test des Mittelwerts

g muss so bestimmt werden, dass

$$\mathbb{P}(\bar{X} \in (\mu_0 - g, \mu_0 + g)) = 1 - \alpha$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow Y = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-g \frac{\sqrt{n}}{\sigma} < Y < g \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \alpha$$

andererseits nach Def. der Quantile von $N(0,1)$

$$\mathbb{P}(-y_{1-\frac{\alpha}{2}} < Y < y_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow g = y_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \left[\bar{x} \notin \left(\mu_0 - y_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + y_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \Rightarrow H_0 \text{ wird abgelehnt} \right]$$

- einseitig:

$$\bar{x} \notin \left(\mu_0 - y_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right)$$

- σ nicht bekannt:

S^2 als Schätzung benutzen \Rightarrow Studentverteilung mit $n - 1$ Freiheitsgraden

10 Verteilungstabellen

10.1 Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung $\Phi(z)$

z	0.00.	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.50000	.50398	.50797	.51196	.51595	.51993	.52392	.52790	.53188	.53585
0.1	.53982	.54379	.54775	.55171	.55567	.55961	.56355	.56749	.57142	.57534
0.2	.57925	.58316	.58706	.59095	.59483	.59870	.60256	.60641	.61026	.61409
0.3	.61791	.62171	.62551	.62930	.63307	.63683	.64057	.64430	.64802	.65173
0.4	.65542	.65909	.66275	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68438	.68793
0.5	.69146	.69497	.69846	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72574	.72906	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75174	.75490
0.7	.75803	.76114	.76423	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78523
0.8	.78814	.79102	.79389	.79673	.79954	.80233	.80510	.80784	.81057	.81326
0.9	.81593	.81858	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83397	.83645	.83891
1.0	.84134	.84375	.84613	.84849	.85083	.85314	.85542	.85769	.85992	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87285	.87492	.87697	.87899	.88099	.88297
1.2	.88493	.88686	.88876	.89065	.89251	.89435	.89616	.89795	.89972	.90147
1.3	.90319	.90490	.90658	.90824	.90987	.91149	.91308	.91465	.91620	.91773
1.4	.91924	.92073	.92219	.92364	.92506	.92647	.92785	.92921	.93056	.93188
1.5	.93319	.93447	.93574	.93699	.93821	.93942	.94062	.94179	.94294	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94844	.94949	.95052	.95154	.95254	.95352	.95448
1.7	.95543	.95636	.95728	.95818	.95907	.95994	.96079	.96163	.96246	.96327
1.8	.96406	.96485	.96562	.96637	.96711	.96784	.96855	.96925	.96994	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97319	.97381	.97441	.97500	.97558	.97614	.97670
2.0	.97724	.97778	.97830	.97882	.97932	.97981	.98030	.98077	.98123	.98169
2.1	.98213	.98257	.98299	.98341	.98382	.98422	.98461	.98499	.98537	.98573
2.2	.98609	.98644	.98679	.98712	.98745	.98777	.98808	.98839	.98869	.98898
2.3	.98927	.98955	.98982	.99009	.99035	.99061	.99086	.99110	.99134	.99157
2.4	.99180	.99202	.99223	.99245	.99265	.99285	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99429	.99445	.99461	.99476	.99491	.99505	.99520
2.6	.99533	.99547	.99560	.99573	.99585	.99597	.99609	.99620	.99631	.99642
2.7	.99653	.99663	.99673	.99683	.99692	.99702	.99710	.99719	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99759	.99767	.99774	.99781	.99788	.99794	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99824	.99830	.99835	.99841	.99846	.99851	.99855	.99860

10.2 Quantile der $N(0, 1)$ -Normalverteilung)

Quantil: z_β

β	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9995
z_β	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

10.3 Quantile der t -Verteilung

Quantil: $t_{\beta,m}$ · m ist die Anzahl der Freiheitsgrade.

m/β	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9995
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,437
10	1,327	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373

10.4 Quantile der χ^2 -Verteilung

Quantil $\chi_{\beta, m}^2$ · m ist die Anzahl der Freiheitsgrade.

m/β	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.09	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.003	0.015	2.705	3.841	5.025	6.634	7.879
2	0.010	0.020	0.050	0.102	0.210	4.605	5.991	7.377	9.210	10.59
3	0.071	0.114	0.215	0.351	0.584	6.251	7.814	9.348	11.34	12.83
4	0.206	0.297	0.484	0.710	1.063	7.779	9.487	11.14	13.27	14.86
5	0.411	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.08	16.74
6	0.675	0.872	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.44	16.81	18.54
7	0.989	1.239	1.689	2.167	2.833	12.01	14.06	16.01	18.47	20.27
8	1.344	1.646	2.179	2.732	3.489	13.36	15.50	17.53	20.09	21.95
9	1.734	2.087	2.700	3.324	4.168	14.68	16.91	19.02	21.66	23.55
10	2.155	2.558	3.246	3.940	4.865	15.98	18.30	20.48	23.20	25.18
11	2.603	3.053	3.815	4.574	5.577	17.27	19.67	21.94	24.72	26.75
12	3.073	3.570	4.403	5.639	6.303	18.54	21.02	23.33	26.21	28.29
13	3.565	4.106	5.008	5.891	7.041	19.81	22.36	24.73	27.68	29.81
14	4.074	4.660	5.628	6.570	7.789	21.06	23.68	26.11	29.14	31.31
15	4.600	5.229	6.262	7.260	8.546	22.30	24.99	27.48	30.57	32.80
16	5.142	5.812	6.907	7.961	9.312	23.54	26.29	28.84	31.99	34.26
17	5.697	6.407	7.564	8.671	10.08	24.76	27.58	30.19	33.40	35.71
18	6.264	7.014	8.230	9.390	10.86	25.98	28.86	31.52	34.80	37.15
19	6.843	7.632	8.906	10.11	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.433	8.260	9.590	10.85	12.44	28.41	31.41	34.16	37.56	39.99
21	8.033	8.897	10.28	11.59	13.23	29.61	32.67	35.47	38.93	41.40
22	8.642	9.542	10.98	12.33	14.04	30.81	33.92	36.78	40.28	42.79
23	9.260	10.19	11.68	13.09	14.84	32.00	35.17	38.07	41.63	44.18
24	9.886	10.85	12.40	13.84	15.65	33.19	36.41	39.36	42.97	45.55
25	10.51	11.52	13.11	14.61	16.45	34.38	37.65	40.64	44.31	46.92
26	11.16	12.19	13.84	15.37	17.29	35.56	38.88	41.92	45.64	48.28
27	11.80	12.87	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.30	16.92	18.93	37.91	41.33	44.46	48.27	50.99
29	13.11	14.25	16.04	17.70	19.76	39.08	42.55	45.72	49.58	52.33
30	13.78	14.95	16.79	18.49	20.59	40.25	43.77	46.97	50.89	53.67

11 Differentiationsregeln

11.1 Produktregel

$$(f \cdot g)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

11.2 Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

11.3 Kettenregel

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

12 Integrationsregeln

12.1 Potenzregeln

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

12.2 Partielle Integration

$$\int f(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx$$

12.3 Integration durch Substitution

$$\int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

13 Logarithmusgesetze

13.1 Produkte

$$\log_a(x_1 x_2 \cdots x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n$$

13.2 Quotienten

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

13.3 Summen und Differenzen

$$\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

13.4 Potenzen

$$\log_a(x^r) = r \log_a x$$

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

13.5 Wurzeln

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a (x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \log_a x$$

13.6 Basisumrechnungen

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

13.7 Ableitung und Integral

$$\log'_e(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int \log_e x dx = x \ln x - x + C$$